Álgebra Linear - Exercícios
(Transformações Lineares)

Índice

1 Transformações Lineares

Exercício 1 *Mostre que as transformações lineares de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^3$,

$$T_1(x,y,z) = (0,y,z) \;\; e\; T_2(x,y,z) = (0, z+y, z+2y)$$

... têm os mesmos núcleos e contradomínios.

Solução

- Tranformação T_1

  Consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^3$:

  $$\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

  Determinemos a matriz da transformação:

  $$\begin{cases} T_1(e_1) = T_1(1,0,0) = (0,0,0) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ T_1(e_2) = T_1(0,1,0) = (0,1,0) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ T_1(e_3) = T_1(0,0,1) = (0,0,1) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 \end{cases}$$

  A matriz da transformação, A_1, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T_1(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

  $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  O núcleo da transformação é dado pelo conjunto:

  $$Nuc(T_1) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : T_1(v) = 0\right\}$$

  Determinar o núcleo consiste em resolver o sistema de equações $A_1 v = 0$ nas variáveis v. Dado que $r_{A_1} = 2 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1, e a solução é da forma:

  $$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 \in \mathbb{R}$$

O contradomínio, ou imagem, de T_1, denotado por $\mathrm{Im}\,(T_1)$ ou $T_1\left(\mathbb{R}^3\right)$ é dado pelo conjunto $\mathrm{Im}\,(T_1) = \left\{w \in \mathbb{R}^3 : T_1\,(v) = w, \forall_{v\in\mathbb{R}^3}\right\}$. Temos assim que analisar a forma dos vectores $A_1 v$. Note-se que $A_1 v$ consiste na combinação linear das colunas de A_1:

$$A_1 v = v_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

É evidente que apenas $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes, pelo que, não esquecendo que estamos a tentar descobrir a forma de w, se terá com vector genérico de $\mathrm{Im}\,(T_1)$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

- Tranformação T_2

  Consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\{e_1 = (1,0,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (0,0,1)\}$$

Determinemos a matriz da transformação:

$$\begin{cases} T_2\,(e_1) = T_2\,(1,0,0) = (0,0,0) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T_2\,(e_2) = T_2\,(0,1,0) = (0,1,2) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \\ T_2\,(e_3) = T_2\,(0,0,1) = (0,1,1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A_1, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T_2\,(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O núcleo da transformação é dado pelo conjunto:

$$Nuc\,(T_2) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : T_2\,(v) = 0\right\}$$

- Determinar o núcleo consiste em resolver o sistema de equações $A_2 v = 0$ nas variáveis v. Construamos a matriz ampliada do sistema e resolvamos por condensação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-1) L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Dado que $r_{A_2} = 2 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1, e a solução é da forma:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 \in \mathbb{R}$$

O contradomínio, ou imagem, de T_2, denotado por $\mathrm{Im}\,(T_2)$ ou $T_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ é dado pelo conjunto $\mathrm{Im}\,(T_2) = \left\{w \in \mathbb{R}^3 : T_2\,(v) = w, \forall_{v \in \mathbb{R}^3}\right\}$. Temos assim que analisar a forma dos vectores $A_2 v$. Note-se que $A_2 v$ consiste na combinação linear das colunas de A_2:

$$A_1 v = v_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

É evidente que apenas $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes (não são múltiplos um do outro), pelo que, não esquecendo que estamos a tentar descobrir a forma de w, se terá com vector genérico de $\mathrm{Im}\,(T_2)$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$$

Tem-se claramente, $Nuc\,(T_1) = Nuc\,(T_2)$. Embora de modo menos claro, também se tem $\mathrm{Im}\,(T_1) = \mathrm{Im}\,(T_2)$. Basta verificar que os vectores da base de $\operatorname{Im}(T_2)$, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ se podem escrever como combinação linear dos vectores da base de $\operatorname{Im}(T_1)$, o que significa que os vectores da base de $\operatorname{Im}(T_1)$ geram o conjunto $\operatorname{Im}(T_2)$. Deste modo, tem-se $\operatorname{Im}(T_1) = \operatorname{Im}(T_2)$.

Exercício 2 *Verifique se a aplicação* $\mathbf{T}$ *se qualifica como transformação linear:* $\mathbb{R}^3$,

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ e } T(x, y) = (2x - y, 0)$$

<u>*Solução*</u>
Temos de verificar se $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall_{u,v \in \mathbb{R}^2}, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$. Façamos então $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &= \\ &= T(\alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) \\ &= T(\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2) \\ &= (2(\alpha u_1 + \beta v_1) - (\alpha u_2 + \beta v_2), 0) \\ &= (2\alpha u_1 - \alpha u_2 + 2\beta v_1 - \beta v_2, 0) \\ &= (2\alpha u_1 - \alpha u_2, 0) + (2\beta v_1 - \beta v_2, 0) \\ &= \alpha(2u_1 - u_2, 0) + \beta(2v_1 - v_2, 0) \\ &= \alpha T(u) + \beta T(v) \end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

Exercício 3 *Determine a matriz da transformação de cada uma das seguintes transformações lineares, considerando a base canónica:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T(x, y) = (2x - y, 0)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T(x, y) = (2x - y, x)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e* $T(x, y, z) = (2x - y, 0, y + z)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *e* $T(x, y, z) = (0, 0, y)$

<u>*Solução*</u>
Consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, e para $\mathbb{R}^3$, $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

a) $\begin{cases} T(e_1) = T(1,0) = (2,0) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ T(e_2) = T(0,1) = (-1,0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{cases}$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{cases} T(e_1) = T(1,0) = (2,1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ T(e_2) = T(0,1) = (-1,0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{cases}$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0,0) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (-1,0,1) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,1) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{cases}$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0) = (0,0,0) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (0,0,1) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,0) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \end{cases}$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 4 *Determine a imagem do vector* $(-2,4)$ *relativamente a cada uma das seguintes transformações lineares. Utilizando primeiro a definição e em seguida utilizando a matriz de cada transformação:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T(x, y) = (2x - y, 0)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T(x, y) = (2x - y, x)$

<u>*Solução*</u>

a) Utilizemos a definição da transformação: $T(-2, 4) = (2 \cdot (-2) - 4, 0) = (-8, 0)$.

Consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$. Determinemos a matriz da transformação:

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1, 0) = (2, 0) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ T(e_2) = T(0, 1) = (-1, 0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o vector $v = (-2, 4)$ se pode escrever como combinação linear da base escolhida do seguinte modo: $(-2) \cdot e_1 + 4 \cdot e_2$, resulta que as coordenadas do vector v na base canónica são $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Conclui-se que as coordenadas de $T(v)$ na base canónica se podem determinar fazendo o produto Av (v neste contexto refere-se às coordenadas e não ao vector propriamente dito):

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o vector $T(v)$ tem coordenadas $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ na base canónica pelo que pode ser escrito como $(-8) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. Um simples cálculo permite verificar que:

$$T(v) = (-8) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = (-8) \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (-8, 0)$$

Como era de esperar, os resultados utilizando a definição da transformação ou a matriz da transformação são iguais.

b) Utilizemos a definição da transformação: $T(-2, 4) = (2 \cdot (-2) - 4, -2) = (-8, -2)$.

Consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. Determenimeos a matriz da transformação:

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1,0) = (2,1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ T(e_2) = T(0,1) = (-1,0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o vector $v = (-2,4)$ se pode escrever como combinação linear da base escolhida do seguinte modo: $(-2) \cdot e_1 + 4 \cdot e_2$, resulta que as coordenadas do vector v na base canónica são $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ resulta que as coordenadas de $T(v)$ na base canónica se podem determinar fazendo o produto Av (v neste contexto refere-se às coordenadas e não ao vector propriamente dito):

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Assim, o vector $T(v)$ tem coordenadas $\begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}$ na base canónica pelo que pode ser escrito como $(-8) \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2$. Um simples cálculo permite verificar que:

$$T(v) = (-8) \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2 = (-8) \cdot (1,0) + (-2) \cdot (0,1) = (-8,-2)$$

Como era de esperar, os resultados utilizando a definição da transformação ou a matriz da transformação são iguais.

Exercício 5 *Considere o espaço das matrizes reais, quadradas de ordem 2, $M_2(\mathbb{R})$. Verifique quais das seguintes transformações são lineares:*

i) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *tal que* $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

ii) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *tal que* $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 2a + 3b + c - d$.

Solução

i) Temos de verificar se

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2), \forall_{A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})}, \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Façamos então $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= \\
&= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2 \\ \alpha c_1 & \beta d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \alpha b_1 \\ \beta c_2 & \alpha d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta c_2 & \beta d_2 \end{vmatrix} \\
&= \alpha^2 |A_1| + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \beta^2 |A_2| \\
&= \alpha^2 T(A_1) + \beta^2 T(A_2) + \alpha\beta \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} \right) \\
&\neq \alpha T(u) + \beta T(v)
\end{aligned}$$

Logo, T não é uma transformação linear.

ii) Temos de verificar se:

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2), \forall_{A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})}, \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Façamos então $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= \\
&= T\left(\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2 \cdot (\alpha a_1 + \beta a_2) + 3 \cdot (\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha c_1 + \beta c_2) - (\alpha d_1 + \beta d_2) \\
&= \alpha \cdot (2a_1 + 3b_1 + c_1 - d_1) + \beta \cdot (2a_2 + 3b_2 + c_2 - d_2) \\
&= \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)
\end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

Exercício 6 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear em* $\mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.

a) Indique o núcleo de $\mathbf{T}$*, a sua dimensão e uma base.*

b) Determine a dimensão da imagem de $\mathbb{R}^3$ *dada por* $\mathbf{T}$.

c) $\mathbf{T}$ *é sobrejectiva? Justifique.*

Solução

a) Consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^3$:

$$\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

Determinemos a matriz da transformação:

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0) = (0,1,0) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (0,-1,0) = 0\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (1,0,-1) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O núcleo da transformação é dado pelo conjunto

$$Nuc(T) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\right\}$$

Determinar o núcleo consiste em resolver o sistema de equações $Av = 0$ nas variáveis v. Construamos a matriz ampliada do sistema e resolvamos por condensação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dado que $r_A = 2 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1, e a solução é da forma:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 \in \mathbb{R}$$

Assim, $Nuc\,(T)$ tem dimensão 1 (nulidade é 1) e base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Sabendo que

$$\dim\left(Nuc\,(T)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(T)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

... teremos, $1 + \dim\left(\mathrm{Im}\,(T)\right) = 3$ e portanto $\dim\left(\mathrm{Im}\,(T)\right) = 2$.

c) A transformação T é sobrejectriva se $\forall_{w\in\mathbb{R}^3}, \exists_{v\in\mathbb{R}^3} : T\,(v) = w$. É simples verificar que um vector genérico de $\mathrm{Im}\,(T)$ terá a forma Av, isto é, será combinação linear das colunas de A. A primeira e segunda colunas de A são múltiplas entre si, logo, são linearmente dependentes. Tal significa que $\mathrm{Im}\,(T)$ terá como base, por exemplo, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Ora, nestas circunstâncias poderemos facilmente inferir que o vector $w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ não pode ser obtido por combinação linear dos vectores da base de $\mathrm{Im}\,(T)$, isto é, não existe um vector v tal que $T\,(v) = w_0$. Confirmemos que de facto assim é, verificando que o sistema $Av = w_0$ é impossível, para o que estudaremos a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como previsível tem-se $r_A = 2 < 3 = r_{A|B}$, isto é, o sistema é impossível.

Exercício 7 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear do espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2 na variável* $\mathbf{x}$*,* P_2*, em* $\mathbb{R}^3$*, definida da seguinte forma:*

$$T[p(x)] = [p(-1), p(0), p(1)]$$

a) Calcule $T\left(x^2 + 5x + 6\right)$*.*

b) Determine, se existir, $T^{-1}(0, 3, 0)$*.*

<u>*Solução*</u>

a) Seja $p(x) = x^2+5x+6$. Teremos $p(-1) = 1-5+6 = 2$, $p(0) = 0+0+6 = 6$ e $p(1) = 1+5+6 = 12$. Assim, $T\left(x^2 + 5x + 6\right) = (2, 6, 12)$.

b) A transformação inversa, T^{-1}, existirá se a matriz da transformação T for regular. Comecemos então por determinar esta matriz: consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^3$, $\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$ e a base canónica para P_2, $\left\{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\right\}$.

$$\begin{cases} T(e_1) = T\left(x^2\right) = (1, 0, 1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(x) = (-1, 0, 1) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(1) = (1, 1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{f_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificando que $|A| = 0 - 1 + 0 - (0 + 1 + 0) = -2 \neq 0$ concluímos que A é regular e portanto T é invertível. A teoria ensina que a matriz da transformação inversa T^{-1} é precisamente a matriz A^{-1}. Utilizando um qualquer método de inversão (por condensação ou pela matriz adjunta) conlui-se que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O vector $w = (0, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$ tem coordenadas $w^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ na base escolhida para $\mathbb{R}^3$, a base canónica. A imagem inversa de w pode ser determinada constituindo o produto $A^{-1}w$:

$$A^{-1}w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Assim, $v^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ são as coordenadas na base escolhida para P_2, a base canónica, da imagem inversa do vector $w \in \mathbb{R}^3$. O vector v será portanto $v = (-3) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = -3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3 \cdot 1 = -3x^2 + 3$.

Exercício 8 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear do espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2,* P_2*, na variável* $\mathbf{x}$*, em si próprio, definida por:*

$$T(1) = 1 + x;\ T(x) = 3 - x^2;\ T\left(x^2\right) = 4 + 2x - 3x^2$$

a) Calcule $T\left(2 - 2x + 3x^2\right)$.

b) A transformação $\mathbf{T}$ *tem inversa? Justifique.*

Solução

a) Seja $p(x) = 2 - 2x + 3x^2$. Teremos:

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= T\left(2 - 2x + 3x^2\right) = \\ &\quad \text{(porque } T \text{é transformação linear)} \\ &= T(2) + T(-2x) + T\left(3x^2\right) = \\ &\quad \text{(porque } T \text{é transformação linear)} \\ &= 2 \cdot T(1) + (-2) \cdot T(1) + 3 \cdot T\left(x^2\right) \\ &= 2 \cdot (1 + x) + (-2) \cdot \left(3 - x^2\right) + 3 \cdot \left(4 + 2x - 3x^2\right) \\ &= 8 + 8x - 7x^2 \end{aligned}$$

b) A transformação inversa, T^{-1}, existirá se a matriz da transformação T for regular. Comecemos então por determinar esta matriz: consideremos a base canónica para P_2, $\left\{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\right\}$.

$$\begin{cases} T(e_1) = T\left(x^2\right) = 4 + 2x - 3x^2 = (-3) \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(x) = 3 - x^2 = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(1) = 1 + x = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{f_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificando que $|A| = 0 - 4 + 0 - (0 - 9 - 2) = 7 \neq 0$ concluímos que A é regular e portanto T é invertível. A teoria ensina que a matriz da transformação inversa T^{-1} é precisamente a matriz A^{-1}. Utilizando um qualquer método de inversão (por condensação ou pela matriz adjunta) conlui-se que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Exercício 9 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear em* $\mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3 \textit{ e fixos.}$$

Determine as condições que a_1, a_2 *e* a_3 *devem satisfazer para* $\mathbf{T}$ *admitir inversa, e obtenha a expressão de* T^{-1}.

Solução

A transformação inversa, T^{-1}, existirá se a matriz da transformação T for regular. Comecemos então por determinar esta matriz: consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^3$, $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0) = (a_1,0,0) = a_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (0,a_2,0) = 0 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,a_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{f_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

Verificando que $|A| = a_1a_2a_3$ concluímos que A é regular, e portanto T é invertível, se e só se $a_1a_2a_3 \neq 0$. Deveremos portanto impor as condições $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0 \wedge$. A teoria ensina que a matriz da transformação inversa T^{-1} é precisamente a matriz A^{-1}. Utilizando um qualquer método de inversão (por condensação ou pela matriz adjunta) conclui-se que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$

Exercício 10 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x))$$

... com T_1 *e* T_2 *transformações lineares de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}$.

Mostre que $\mathbf{T}$ *é transformação linear se e só se* T_1 *e* T_2 *são transformações lineares.*

<u>*Solução*</u>

($\Longrightarrow$) Suponhamos que T é uma transformação linear. Pretende-se mostrar que T_1 e T_2 são transformações lineares.

Se T é uma transformação linear teremos:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall_{u,v \in \mathbb{R}^3}, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$

Desenvolvendo ambas os termos das igualdades teremos:

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &= (T_1(\alpha u + \beta v), T_2(\alpha u + \beta v)) \\ \alpha T(u) + \beta T(v) &= \alpha (T_1(u), T_2(u)) + \beta (T_1(v), T_2(v)) \end{aligned}$$

Teremos assim:

$$\begin{aligned} (T_1(\alpha u + \beta v), T_2(\alpha u + \beta v)) &= \alpha (T_1(u), T_2(u)) + \beta (T_1(v), T_2(v)) \\ &= (\alpha T_1(u), \alpha T_2(u)) + (\beta T_1(v), \beta T_2(v)) \\ &= (\alpha T_1(u) + \beta T_1(v), \alpha T_2(u) + \beta T_2(v)) \end{aligned}$$

O que implica que:

$$(T_1(\alpha u + \beta v), T_2(\alpha u + \beta v)) = (\alpha T_1(u) + \beta T_1(v), \alpha T_2(u) + \beta T_2(v)) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} T_1(\alpha u + \beta v) = \alpha T_1(u) + \beta T_1(v) \\ T_2(\alpha u + \beta v) = \alpha T_2(u) + \beta T_2(v) \end{cases}$$

Mas então T_1 e T_2 são transformações lineares.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que T_1 e T_2 são transformações lineares. Pretende-se mostrar que T é uma transformação linear.

Se T_1 e T_2 são transformações lineares teremos:

$$T_1(\alpha u + \beta v) = \alpha T_1(u) + \beta T_1(v), \forall_{u,v \in \mathbb{R}^3}, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$
$$\text{e}$$
$$T_2(\alpha u + \beta v) = \alpha T_2(u) + \beta T_2(v), \forall_{u,v \in \mathbb{R}^3}, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$

Pretende-se mostrar que $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall_{u,v \in \mathbb{R}^3}, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
T(\alpha u + \beta v) &= (T_1(\alpha u + \beta v), T_2(\alpha u + \beta v)) \\
&= (\alpha T_1(u) + \beta T_1(v), \alpha T_2(u) + \beta T_2(v)) \\
&= (\alpha T_1(u), \alpha T_2(u)) + (\beta T_1(v), \beta T_2(v)) \\
&= \alpha(T_1(u), T_2(u)) + \beta(T_1(v), T_2(v)) \\
&= \alpha T(u) + \beta T(v)
\end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

Exercício 11 *Seja P_2 o espaço vectorial dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear* $\mathbf{T}$*, de P_2 em si mesmo, definida por $T[p(x)] = p(x+1) - p(x), \forall_{p(x) \in P_2}$.*

a) Indique, justificando, uma base para a imagem de $\mathbf{T}$.

b) Determine o núcleo da transformação linear $\mathbf{T}$*, a sua dimensão e uma base.*

Solução

a) Comecemos por determinar a matriz da transformação T considerando a base canónica para P_2, $\{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\}$:

$$\begin{cases} T(e_1) = T(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(x) = (x+1) - x = 1 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(1) = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{f_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

É simples verificar que um vector genérico de $\mathrm{Im}\,(T)$ terá a forma Av, isto é, será combinação linear das colunas de A. A primeira e segunda colunas de A são linearmente independentes enquanto a terceira é o vector nulo. Tal significa que $\mathrm{Im}\,(T)$ terá como base, por exemplo, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) O núcleo da transformação é dado pelo conjunto:

$$Nuc\,(T) = \{v \in P_2 : T\,(v) = 0\}$$

Determinar o núcleo consiste em resolver o sistema de equações $Av = 0$ nas variáveis v. Construamos a matriz ampliada do sistema e resolvamos por condensação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)\,L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-1)\,L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dado que $r_A = 2 < 3$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1, e a solução é da forma:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 \in \mathbb{R}$$

Assim, $Nuc\,(T)$ tem dimensão 1 (nulidade é 1) e base $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Exercício 12 *Considere o espaço vectorial real $M_n\,(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem* **n**. *Seja* **T** *uma transformação definida em $M_n\,(\mathbb{R})$: $T\,(A) = A - A^T, \forall_{A \in M_n(\mathbb{R})}$.*

a) Mostre que **T** *é uma transformação linear.*

b) Determine o núcleo de $\mathbf{T}$*, a sua dimensão e uma base.*

c) Considere $n = 2$*. Determine a matriz que representa a transformação linear* $\mathbf{T}$*, supondo fixada a base canónica no espaço* $M_2(\mathbb{R})$*.*

<u>*Solução*</u>

a) Temos de verificar se:

$$T(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha T(A_1) + \beta T(A_2), \forall_{A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})}, \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha A_1 + \beta A_2) &= \alpha A_1 + \beta A_2 - (\alpha A_1 + \beta A_2)^T \\
&= \alpha A_1 + \beta A_2 - \left(\alpha A_1^T + \beta A_2^T\right) \\
&= \alpha A_1 + \beta A_2 - \alpha A_1^T - \beta A_2^T \\
&= \alpha A_1 - \alpha A_1^T + \beta A_2 - \beta A_2^T \\
&= \alpha\left(A_1 - A_1^T\right) + \beta\left(A_2 - A_2^T\right) \\
&= \alpha T(A_1) + \beta T(A_2)
\end{aligned}$$

Logo, T é uma transformação linear.

b) O núcleo da transformação é dado pelo conjunto:

$$Nuc(T) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : T(A) = 0\}$$

Vejamos então:

$$\begin{gathered}
T(A) = 0 \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow A - A^T = 0 \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow A = A^T
\end{gathered}$$

O núcleo é portanto constituído pelas matrizes reais simétricas de ordem n. Para determinar uma base e a dimensão de $Nuc(T)$ comecemos por estudar o caso $n = 3$. Neste caso, uma matriz do núcleo terá a forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \forall_{a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}}$$

Poderemos escrever esta matriz como a seguinte combinação linear de matrizes:

$$a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}+$$
$$d\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\forall_{a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}}$$

Concluímos assim, que no caso $n=3$, a nulidade é 6 e a base é constituída pelos vectores:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\right.$$
$$\left.,\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\},\forall_{a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}}$$

Poderemos facilmente inferir que, no caso geral, a nulidade será $1+2+\cdots+n=n\frac{n+1}{2}$ e a base será constituída pelos matrizes com os seguintes elementos:

$$\begin{cases}a_{ij}=1, & i\geq j=1,\cdots,n\\ a_{ij}=a_{ji} & i<j=1,\cdots,n\end{cases}$$

c) Consideremos então base canónica para $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{e_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

Determinemos a matriz da transformação:

$$\begin{cases} T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ \quad = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ \quad = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ \quad = 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ T(e_4) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ \quad = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 4×4 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 13 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação linear em* $\mathbb{R}^3$*, onde* $T(1,0,0) = (10,3,-1)$*,* $T(0,1,0) = (5,3,-4)$ *e* $T(0,0,1) = (4,6,-10)$*. Determine* $T(v)$ *onde* $v = (9,-4,9)$*.*

Solução

Comecemos por determinar a matriz da transformação: consideremos a base canónica para $\mathbb{R}^3$, $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0) = (10,3,-1) = 10 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \\ T(e_2) = T(0,1,0) = (5,3,-4) = 5 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + (-4) \cdot e_3 \\ T(e_3) = T(0,0,1) = (4,6,-10) = 4 \cdot e_1 + 6 \cdot e_2 + (-10) \cdot e_3 \end{cases}$$

A matriz da transformação, A, será uma matriz do tipo 3×3 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{f_i\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ -1 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

Como o vector $v = (9,-4,9)$ se pode escrever como combinação linear da base escolhida do seguinte modo: $9 \cdot e_1 + (-4) \cdot e_2 + 9 \cdot e_3$, resulta que as coordenadas do vector v na base canónica são $\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$. Conclui-se que as coordenadas de $T(v)$ na base canónica se podem determinar fazendo o produto Av (v neste contexto refere-se às coordenadas e não ao vector propriamente dito):

$$Av = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ -1 & -4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \\ 69 \\ -83 \end{bmatrix}$$

Assim, o vector $T(v)$ tem coordenadas $\begin{bmatrix} 106 \\ 69 \\ -83 \end{bmatrix}$ na base canónica pelo que pode ser escrito como $106 \cdot e_1 + 69 \cdot e_2 + (-83) \cdot e_3$. Um simples cálculo permite verificar que:

$$\begin{aligned} T(v) &= 106 \cdot e_1 + 69 \cdot e_2 + (-83) \cdot e_3 \\ &= 106 \cdot (1,0,0) + 69 \cdot (0,1,0) + (-83) \cdot (0,0,1) \\ &= (-8,0) \end{aligned}$$

Exercício 14 *Seja* $\mathbf{T}$ *uma transformação em* $\mathbb{R}^2$*:* $T(x,y) = (k \cdot x, x+y)$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Prove que $\mathbf{T}$ *é linear.*

b) Determine $\mathbf{k}$ *de modo a que a transformação* $\mathbf{T}$ *admita inversa e, para esses valores, obtenha a transformação inversa* T^{-1}.

c) Considere $k = 0$*. Determine a dimensão e uma base no núcleo de* $\mathbf{T}$.

Solução

Exercício 15 *Suponha que* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *são espaços vectoriais e* $U, T : V \to W$ *transformações lineares.*

a) O que entende por núcleo de $\mathbf{T}$*?*

b) Mostre que $Núc(U+T) \supseteq Núc(U) \cap Núc(T)$.

Solução

Exercício 16 *Seja* $\mathbf{V}$ *um espaço vectorial de dimensão finita com base* $\alpha = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *e* $\mathbf{W}$ *um espaço vectorial de dimensão finita com base* $\beta = \{w_1, \cdots, w_m\}$. *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Complete a seguinte definição: A matriz da transformação* $\mathbf{T}$, *relativa às bases* α *e* β *é uma matriz* $\mathbf{A}$, *do tipo* $n \times m$, *cujos elementos satisfazem as equações ...*

Solução

Exercício 17 *Seja* $\mathbf{V}$ *um espaço vectorial de dimensão finita com base* $\alpha = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *e* $\mathbf{W}$ *um espaço vectorial de dimensão finita com base* $\beta = \{w_1, \cdots, w_m\}$. *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Diga o que entende por* ***matriz da transformação*** $\mathbf{T}$ *e indique, sem provar, uma fórmula para as coordenadas da imagem* $T(x), x \in V$ *em termos da matriz da transformação* $\mathbf{T}$ *e do vector das coordenadas do vector* $\mathbf{x}$.

Solução

Exercício 18 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ *a matriz de uma transformação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *numa dada base* $\alpha = \{v_1, v_2\}$.*Seja* $\beta = \{u_1, u_2\}$ *uma outra base de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $u_1 = 3v_1 + v_2$ *e* $u_2 = 2v_1 + v_2$. *Determine a matriz da transformação* $\mathbf{T}$ *relativamente à base* β.

Solução

Exercício 19 *Considere a matriz da transformação linear* $\mathbf{T}$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -4 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Qual a nulidade de $\mathbf{T}$*?*

b) Determine uma base para o núcleo de $\mathbf{T}$.

c) Qual a dimensão do contradomínio de $\mathbf{T}$*?*

d) Determine uma base para o contradomínio de $\mathbf{T}$.

Solução

Exercício 20 *Seja P_n o espaço vectorial dos polinómios de grau inferior ou igual a $\mathbf{n}$ de coeficientes reais, na variável $\mathbf{x}$. Para qualquer $p \in P_n$, denote-se por p' a derivada em ordem a $\mathbf{x}$ do polinómio $\mathbf{p}$.*

a) *Seja $p \in P_n$. Mostre que $(x \cdot p' - p) \in P_n$.*

b) *Qual a dimensão de P_n?*

c) *Considere a aplicação $T : P_n \to P_n$, tal que $T[p(x)] = x \cdot p^{'}(x) - p(x), \forall_{p(x) \in P_n}$. Mostre que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear.*

d) *Utilizando o facto de que $T(p) = x^2 \left(\frac{p}{x}\right)'$ e que $q' = 0$ implica que $\mathbf{q}$ é uma constante, determine uma base para o núcleo de $\mathbf{T}$.*

e) *Qual a dimensão do núcleo de $\mathbf{T}$.*

f) *Qual a dimensão do contradomínio de $\mathbf{T}$.*

g) *Determine $T(1)$, $T(x)$, $T\left(x^2\right)$ e $T\left(x^k\right)$, onde $0 < k \leq n$.*

h) *Seja $\beta = \left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1}\right\}$ uma base P_n. Assumindo $n = 3$ determine as coordenadas de $p(x) = (x-2)\left(x^2 - 3x + 1\right)$ na base β.*

i) *Determine a matriz da tansformação $\mathbf{T}$ na base $\beta = \left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1}\right\}$.*

j) *Quais os valores próprios da transformação $\mathbf{T}$?*

l) *Considere o polinómio $p(x) = c_0 + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. Determine o polinómio $\mathbf{q}$, tal que $T(q) = p$.*

Solução