Álgebra Linear
Transformações Lineares

Prof. Carlos Alexandre Mello

cabm@cin.ufpe.br

Transformações Lineares

- Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis
- Muitos problemas podem ser representados por tais funções
- **Definição:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função de V em W, F: $V \rightarrow W$ que satisfaz as condições:
  - i) Quaisquer que sejam **u** e **v** em V: F(**u**+**v**)=F(**u**)+F(**v**)
  - ii) Quaisquer que sejam k$\in$R e **v**$\in V$: F(k.**v**) = k.F(**v**)
    - Princípio da Superposição

Guardem esse nome!!

Transformações Lineares

- **Exemplo 1:**
- $V = \mathrm{R}$ e $W = \mathrm{R}$
- $F: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ definida por $\mathbf{u} \rightarrow \alpha.\mathbf{u}$ ou $F(\mathbf{u}) = \alpha.\mathbf{u}$

- Solução:
  - $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.\mathbf{u} + \alpha.\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
  - $F(k.\mathbf{u}) = \alpha.k.\mathbf{u} = k.\alpha.\mathbf{u} = k.F(\mathbf{u})$
  - Logo, F é linear!

Transformações Lineares

- **Exemplo 2:**
- F: R $\rightarrow$ R definida por $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u^2}$ ou $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u^2}$

- Solução:
  - $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u^2} + 2.\mathbf{u.v} + \mathbf{v^2} \neq \mathbf{u^2}+\mathbf{v^2} = F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v})$

  - Logo, F não é linear!

Transformações Lineares

- **Exemplo 3:**
- $F: R^2 \rightarrow R^3$
- $(x,y) \rightarrow (2x, 0, x + y)$ ou $F(x, y) = (2x, 0, x + y)$
- Solução:
  - Dados **u** e **v** $\in R^2$, sejam **u**$=(x_1,y_1)$ e **v**$=(x_2,y_2)$, $x_i,y_i \in R$
  - $F(\mathbf{u}+\mathbf{v})=F((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

    $= (2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$

    $= (2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
  - $F(k.\mathbf{u})=F(k.(x_1, y_1))=F(k.x_1, k.y_1) = (2k.x_1, 0, k.x_1+k.y_1) =$

    $= k(2x_1, 0, x_1 + y_1) = k.F(\mathbf{u})$ Logo, F é linear!

Transformações Lineares

- **OBS 1:** Da definição de transformação linear, temos que a transformação do vetor nulo leva ao mesmo vetor nulo: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- Isso ajuda a detectar transformações não lineares: se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, implica uma transformação não linear
- No entanto, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ não é condição suficiente para que T seja linear (ex.: $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$)

Transformações Lineares

- **OBS 2:** Uma transformação para ser linear não implica que ela é derivada de uma função linear
- Por exemplo: $(x, y) \rightarrow (x + 5, y)$ não é transf. Linear, embora o mapeamento seja linear

Verifique que essa transf. não é linear!!

Transformações Lineares

- **Exemplo:** $V = R^n$ e $W = R^m$
- Seja A uma matriz mxn. Definimos:
- $L_A: R^n \rightarrow R^m$ por $\mathbf{v} \rightarrow A.\mathbf{v}$
- onde **v** é tomado como vetor coluna: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$
- $L_A(\mathbf{v}) = A. \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$

Cont.

Transformações Lineares

- **Exemplo:**
- Das propriedades de operações de matrizes:
  - $L_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.\mathbf{u} + A.\mathbf{v} = L_A(\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v})$
  - $L_A(k.\mathbf{u}) = A.(k.\mathbf{u}) = k.(A.\mathbf{u}) = k.L_A(\mathbf{u})$
  - Logo, L_A é linear

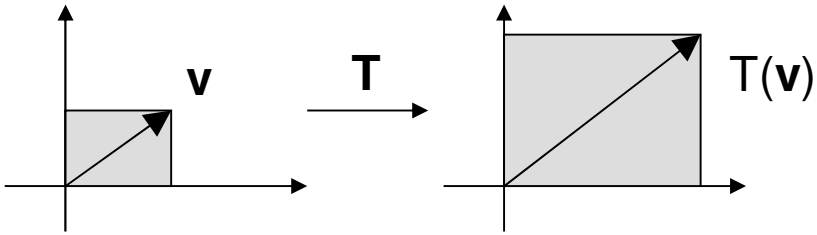
Cont.

Transformações Lineares

- **Exemplo:**
- Suponha $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $L_A: R^2 \rightarrow R^3$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$
- Então, $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$

Transformações do Plano no Plano

- 1) Expansão (ou contração) uniforme:
  - T: $R^2 \rightarrow R^2$, $\alpha \in R$, $\mathbf{v} \rightarrow \alpha.\mathbf{v}$
  - Por exemplo, T: $R^2 \rightarrow R^2$, $\alpha = 2$, $\mathbf{v} \rightarrow 2.\mathbf{v}$
  - $T(x, y) = 2(x, y)$



  - Na forma matricial:

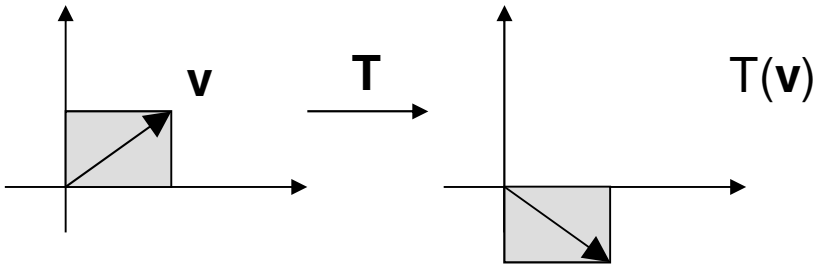
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  - Nesse caso, temos uma expansão. Se $0 < \alpha < 1$, teríamos uma contração

Transformações do Plano no Plano

- 2) Reflexão em Torno do Eixo X:
  - T: $R^2 \rightarrow R^2$, $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
  - Na forma matricial:

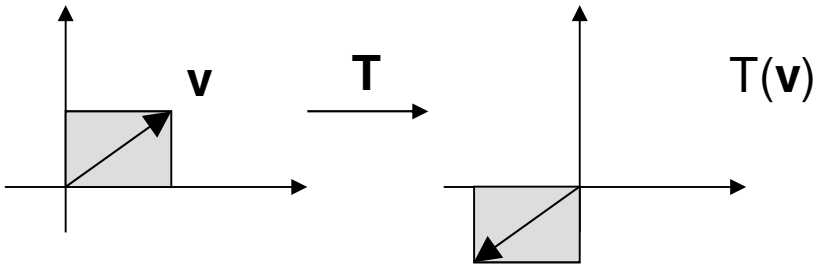
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

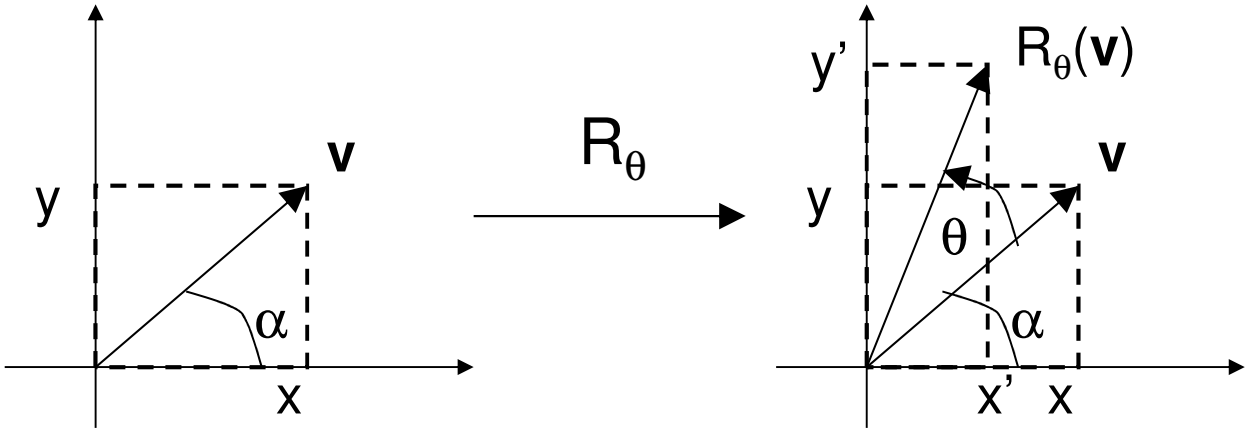
- 3) Reflexão na Origem:
  - T: $R^2 \rightarrow R^2$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ou $T(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
  - Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)



$x' = r.\cos(\theta + \alpha) = r.\cos\alpha\cos\theta - r.\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta$, onde $r = |\mathbf{v}|$

Mas, $r.\cos\alpha = x$ e $r.\text{sen}\alpha = y$

$\Rightarrow x' = x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta$

Analogamente: $y' = y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta$

Assim: $R_\theta(x,y) = (x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta,\ y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta)$

Cont.

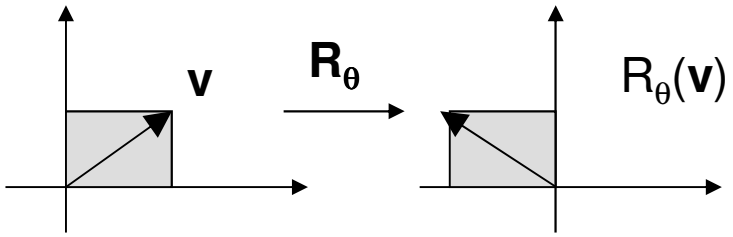
Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta \\ y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Caso $\theta = \pi/2$, temos:

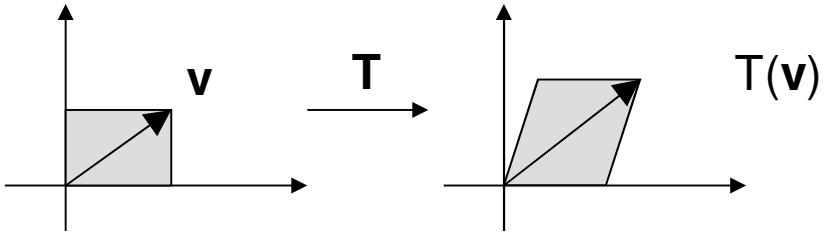
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 5) Cisalhamento Horizontal:
  - $T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \in R$
  - Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 6) Translação:
  - $T(x, y) = (x + a, y + b), a, b \in R$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Observe que, a menos que a = b = 0, essa transformação não é linear.

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Dados dois espaços vetoriais *V* e *W* e uma base *V*, $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$, sejam $\mathbf{w_1}, ..., \mathbf{w_n}$ elementos arbitrários de *W*. Então existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v_1})=\mathbf{w_1}, ..., T(\mathbf{v_n})=\mathbf{w_n}$.Esta transformação é dada por:
  - Se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + ... + a_n\mathbf{v_n}$
  - $T(\mathbf{v}) = a_1T(\mathbf{v_1}) + ... + a_nT(\mathbf{v_n}) = a_1\mathbf{w_1} + ... + a_n\mathbf{w_n}$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?
- Solução:
  - $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{e_2} = (0, 1)$
  - $\mathbf{w_1} = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w_2} = (0, 0, 1)$
  - $\mathbf{v} = (x, y)$
  - $\mathbf{v} = (x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1)$
  - $T(\mathbf{v}) = T(x.(1, 0)) + T(y.(0, 1))$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e_1}) + y.T(\mathbf{e_2}) = x.(2, -1, 0) + y.(0, 0, 1)$
  - $T(\mathbf{v}) = (2x, -x, y)$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
- Solução 1:
  - $T(1, 1) = (3, 2, 1)$
  - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

  Não formam base canônica!!
  - Mas:
  - $T(0,-2)=(0,1,0) \Rightarrow -2.T(0,1)=(0,1,0) \Rightarrow T(0,1)=(0,-½,0)$
  - $T(1,1)=T(1,0) + T(0,1) = (3,2,1)$
  - $\Rightarrow T(1,0) + (0,-½,0) = (3, 2,1) \Rightarrow T(1,0) = (3,5/2,1)$
  - Logo: $T(1,0) = (3, 5/2, 1)$ e $T(0,1) = (0, -½, 0)$
    - Agora formam uma base canônica!

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:**
- Solução 1:
  - $\mathbf{v} = (x, y)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e_1}) + y.T(\mathbf{e_2}) = x.(3, 5/2, 1) + y.(0, -½, 0)$
  - $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - ½y, x)$
  - OBS:
    - $T(1,1) = (3, 5/2 - ½, 1) = (3, 2, 1)$
    - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
- Solução 2:
  - $T(1, 1) = (3, 2, 1)$
  - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

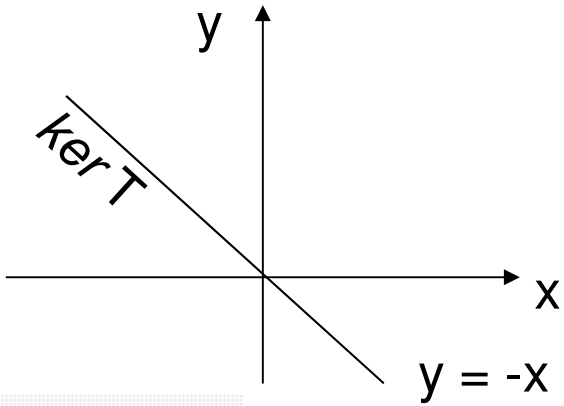
  Não formam base canônica!!
  - $\mathbf{v} = (x, y) = a.(1, 1) + b.(0, -2)$
  - Logo: $x = a$ e $y = a - 2b \Rightarrow b = (x - y)/2$
  - Assim: $\mathbf{v} = x.(1, 1) + [(x - y)/2].(0, -2)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(1,1) + [(x - y)/2].T(0, -2)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.(3, 2, 1) + [(x - y)/2].(0, 1, 0)$
  - $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - ½y, x)$ (como antes)

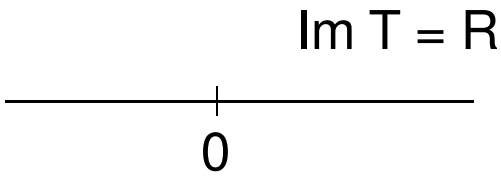
Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ tal que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz T($\mathbf{v}$)=$\mathbf{w}$. Ou seja:
  - Im(T) = {$\mathbf{w} \in W$; T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{w}$ para algum $\mathbf{v} \in V$}
- **Definição:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que T($\mathbf{v}$)=$\mathbf{0}$ é chamado de núcleo de T, sendo denotado por *ker* T *(ker = kernel)*. Isto é:
  - ker T = {$\mathbf{v} \in V$; T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{0}$}

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:** $T:R^2 \rightarrow R$, $(x, y) \rightarrow x + y$
- Neste caso, *ker* T = $\{(x,y) \in R^2;\ x + y = 0\}$
- Isto é, *ker* T é a reta $y = -x$
- Podemos dizer ainda que *ker* T = $\{(x, -x);\ x \in R\} = \{x.(1,-1);\ x \in R\} = [(1,-1)]$
- Im T = R, pois dado $\mathbf{w} \in R$, $\mathbf{w} = T(\mathbf{w}, 0)$





Qualquer valor dos reais satisfaz o par (x, -x).

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 2:** Seja $T:R^3 \rightarrow R^3$, dada por
  - $T(x, y,z) = (x, 2y, 0)$
- Então a imagem de T:
  - $Im(T) = \{(x, 2y, 0): x, y \in R\}$

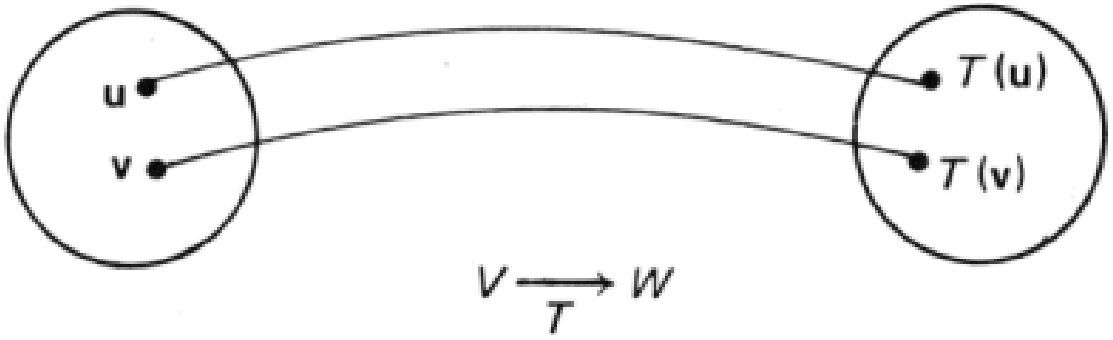
  $= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0), x,y \in R\}$

  $= <(1, 0, 0), (0, 2, 0)>$
  - $\dim Im(T) = 2$
- O núcleo de T é dado por:
  - $\ker T = \{(x,y,z): T(x,y,z) = (0,0,0)\} \Rightarrow (x, 2y, 0)=(0, 0, 0)$

  $\{(0, 0, z): z \in R\} = \{z(0,0,1): z \in R\} \Rightarrow [(0, 0, 1)]$
  - $\dim \ker T = 1$

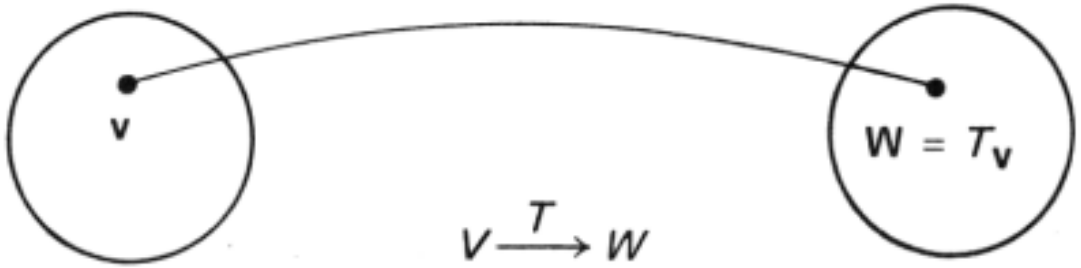
Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. T:$V \rightarrow W$, dizemos que T é **injetora** se, dados $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in V$ com T(**u**) = T(**v**), tivermos **u** = **v** ou, de forma equivalente, T é injetora se dados $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$
- Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas



Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. T: $V \rightarrow W$, dizemos que T é **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W, ou seja $T(V) = W$
- Em outras palavras, T é sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$



Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** $T:R \rightarrow R^2$, $x \rightarrow (x, 0)$
- Dados $x, y \in R$, suponhamos que $T(x)=T(y)$
- Então $(x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y$
- Logo, T é injetora.
- Mas T não é sobrejetora uma vez que $Im(T) \neq R^2$

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então *ker* T={**0**}, se e somente se, T é injetora
- **Teorema:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear, então: dim *ker* T + dim Im T = dim V
- **Corolário 1:** Se dim V = dim W, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora
- **Corolário 2:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base
  - Base de V em base de W

Conceitos e Teoremas

- Quando uma transformação linear T: $V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dá-se o nome de **isomorfismo**
  - Tais espaços vetoriais são ditos Isomorfos

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:** Seja $T:R^3 \rightarrow R^3$ dada por:
  - $T(x,y,z) = (x - 2y, z, x + y)$
- Vamos mostrar que T é um isomorfismo e calcular sua inversa T^{-1}:
- Solução:
  - Se pudermos mostrar que T é injetora, teremos que T é um isomorfismo pelo corolário 2 anterior
  - Isso equivale a mostrar que *ker* T = {(0, 0, 0)}
  - Mas *ker* T ={(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)} e T(x,y,z) = (0,0,0), se e somente se: (x – 2y, z, x + y) = (0,0,0):

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**
  - $(x - 2y, z, x + y) = (0,0,0)$
  - Isso implica:
    - $x - 2y = 0$ $\quad x = 2y$
    - $z = 0$ $\quad z = 0$
    - $x + y = 0$ $\quad x = -y$

    $\Rightarrow x = y = z = 0$
  - Portanto, T é isomorfismo
  - Tomando a base canônica de R^3, sua imagem pela transformação é:
    - $\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\} = \{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$
    - que ainda é uma base de R^3
  - Calculemos a transformação inversa de T

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**
  - Como:

Inversa

$$\left.\begin{array}{ll} T(1,0,0) = (1,0,1) & \Rightarrow T^{-1}(1,0,1)=(1,0,0) \\ T(0,1,0) = (-2,0,1) & \Rightarrow T^{-1}(-2,0,1)=(0,1,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,0) & \Rightarrow T^{-1}(0,1,0)=(0,0,1) \end{array}\right\} T^{-1}(x,y,z)=?$$

  - Vamos escrever (x,y,z) em relação à base {(1,0,1), (-2, 0,1), (0,1,0)}
    - $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(-2, 0, 1) + c(0, 1, 0)$

$\Rightarrow x = a - 2b, \quad y = c, \quad z = a + b$

$\Rightarrow a = (x + 2z)/3, \quad b = (z - x)/3, \quad c = y$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \frac{(x + 2z)}{3}(1, 0, 1) + \frac{(z - x)}{3}(-2,0,1) + y(0,1,0)$$

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**
  - Então:
    - $T^{-1}(x, y, z) = \frac{(x + 2z)}{3}T^{-1}(1, 0, 1) + \frac{(z - x)}{3}T^{-1}(-2,0,1) + yT^{-1}(0,1,0)$
    - $T^{-1}(x, y, z) = \frac{(x + 2z)}{3}(1,0,0) + \frac{(z - x)}{3}(0,1,0) + y(0,0,1)$
    - $T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + 2z}{3}, \frac{z - x}{3}, y\right)$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 2:**
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
  - $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta'=\{(1,0,0),(0,1,0), (0,0,1)\}$
  - $T_A: R^3 \rightarrow R^2$
  - Encontremos essa transformação linear.
  - Solução: Seja $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow A.x = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - Então $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z)(1,0) + (2x + 4y - z)(0,1)$
  - $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 3:**
  - Seja $T:R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$
  - Sejam $\beta=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $\beta'=\{(1,3),(1,4)\}$
  - Procuremos $[T]_{\beta'}^{\beta}$
  - Calculando T nos elementos da base β temos:
    - $T(1, 1, 1) = (2, 5) = 3.(1, 3) -1.(1, 4)$
    - $T(1, 1, 0) = (3, 1) = 11.(1, 3) -8.(1, 4)$
    - $T(1, 1, 1) = (2, 3) = 5.(1, 3) -3.(1, 4)$
  - Então: $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 4:**
  - Seja T a transformação anterior
  - Sejam $\beta=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta'=\{(1,0),(0,1)\}$
  - Calculemos $[T]_{\beta'}^{\beta}$
  - Calculando T nos elementos da base β temos:
    - T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2.(1, 0) + 3.(0, 1)
    - T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1.(1, 0) - 2.(0, 1)
    - T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1.(1, 0) + 4.(0, 1)
  - Então: $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 5:**
  - Dadas as bases
    - $\beta=\{(1, 1),(0, 1)\}$ de R^2
    - $\beta'=\{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de R^3
  - Encontremos a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ cuja matriz é $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
  - Interpretando a matriz temos:
    - $T(1, 1) = 0.(0, 3, 0) -1.(-1, 0, 0) – 1.(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$
    - $T(0, 1) = 2.(0, 3, 0) + 0.(-1, 0, 0) + 3.(0, 1, 1) = (0, 9, 3)$

Cont.

Transformações Lineares e Matrizes

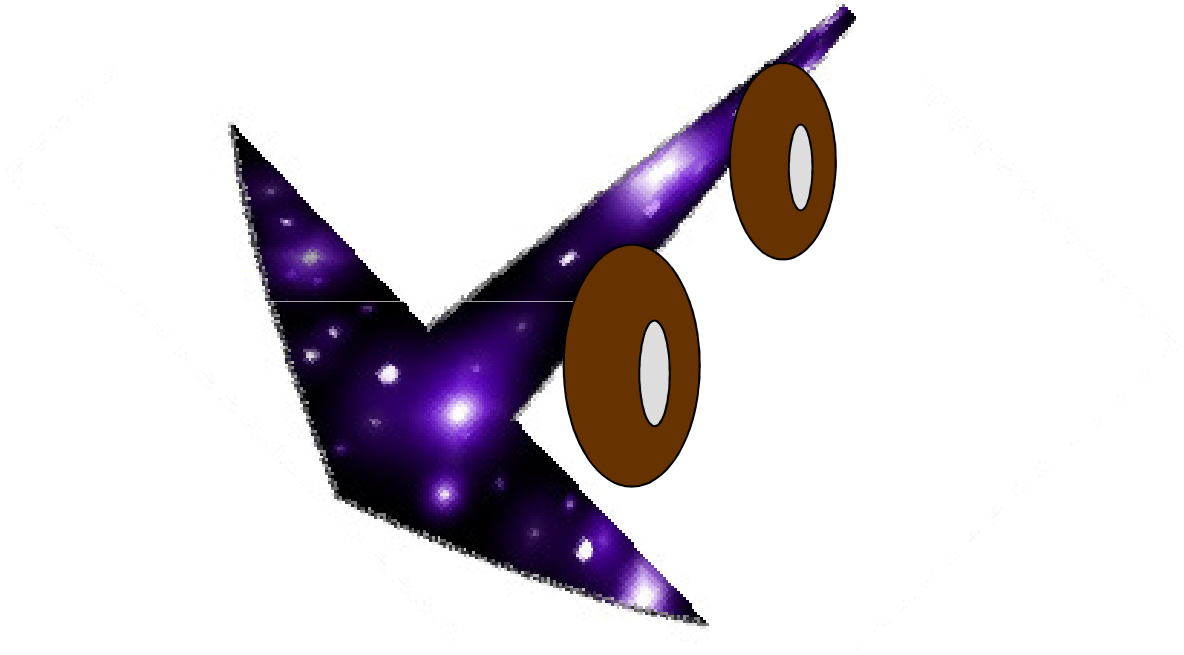
- **Exemplo 5:**
  - Devemos encontrar T(x, y).
  - Para isso escrevemos (x, y) em relação à base β:
    - $(x, y) = x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)$
  - Aplicando T e usando a linearidade:
    - $T(x, y) = T\{x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)\} = x.T(1, 1) + (y - x).T(0, 1)$
    - $T(x, y) = x.(1, -1, -1) + (y - x).(0, 9, 3)$
    - $T(x, y) = (x, 9y - 10x, 3y - 4x)$

Transformações Lineares

- Seja $T:V \rightarrow V$ uma transformação linear e α e β bases de V então:
  - $[T]^{\beta}_{\beta} = [\,I\,]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[\,I\,]^{\beta}_{\alpha}$
- Lembrando que
  - $[\,I\,]^{\beta}_{\alpha} = ([\,I\,]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$
- e chamando $[\,I\,]^{\alpha}_{\beta}=A$, temos
  - $[T]^{\beta}_{\beta} = A\,.\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,.\,A^{-1}$
- Nesse caso, dizemos que as matrizes $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ são *semelhantes*

Exercícios Sugeridos

- 2
- 3
- 4
- 6
- 11
- 14
- 19
- 20
- 23

A Seguir...

- Autovalores e Autovetores