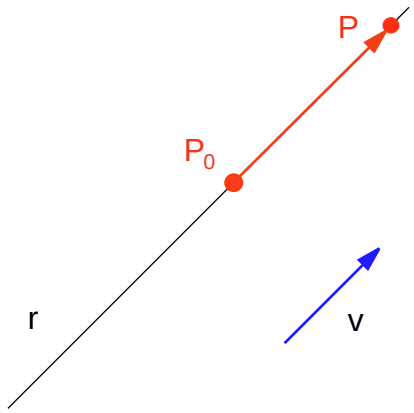
Retas e Planos

Equações de Retas

Equação Paramétrica da Reta no Espaço

Considere o espaço ambiente como o espaço tridimensional. Um vetor $v = (a, b, c)$ determina uma direção no espaço. Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, existe uma única reta r paralela ao vetor v passando pelo ponto P_0.



Gostaríamos de encontrar a equação desta reta. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a esta reta se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a v, ou seja, se e somente se $\overrightarrow{P_0P}$ é múltiplo escalar de v, isto é,

$$\overrightarrow{P_0P} = tv$$

para algum escalar $t \in \mathbb{R}$. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_0P}$ são dadas por

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Portanto, P pertence a esta reta se e somente se

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc),$$

ou seja, se e somente se

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$$

Assim, qualquer ponto P de coordenadas $(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) = \overrightarrow{OP_0} + tv$ pertence à reta dada. Esta equação é chamada uma **equação paramétrica da reta** r e v é chamado um **vetor direção** da reta.
Observação: O parâmetro t pode ser imaginado como representando o tempo; neste caso o vetor direção representa a velocidade com que um ponto percorre esta reta.

Exemplo 1. *A reta que passa pelo ponto $P_0 = (1, 0, -2)$ e é paralela ao vetor $v = (-5, 8, 3)$ tem equação paramétrica*

$$\begin{cases} x &= 1 - 5t \\ y &= 8t \\ z &= -2 + 3t \end{cases}$$

Sabemos que dois pontos determinam uma reta. Uma equação paramétrica para esta reta pode ser encontrada uma vez que as coordenadas destes pontos sejam conhecidas:

Exemplo 2. *Encontre uma equação paramétrica para a reta que passa pelos pontos $P_1 = (1, 3, -2)$ e $P_2 = (4, -5, -2)$.*

Resposta: Como o segmento orientado $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 3, -2) - (4, -5, -2) = (-3, 6, 0)$ pertence a esta reta, ele representa um vetor direção para ela. Qualquer um dos pontos P_1 ou P_2 pode ser escolhido para construir uma equação paramétrica para a reta:

$$\begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 3 + 6t \\ z &= -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= 4 - 3t \\ y &= -5 + 6t \\ z &= -2 \end{cases}$$

são duas equações paramétricas possíveis para esta reta. ■

Equações Simétricas da Reta no Espaço

A partir da equação paramétrica da reta

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$$

podemos resolver em t, se todas as componentes do vetor v são não-nulas, obtendo as **equações simétricas** da reta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Exemplo 3. *As equações simétricas da reta do Exemplo 1 são*

$$\frac{1 - x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z + 2}{3}.$$

Equações da Reta no Plano

A equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ paralela ao vetor $v = (a, b)$ é dada por

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \end{cases}.$$

As equações simétricas desta reta são

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Daí vemos que toda reta no plano pode ser representada por uma única equação da forma

$$Ax + By + C = 0.$$

(Por exemplo, $A = b, B = -a$ e $C = ay_0 - bx_0$.)

Se $A \neq 0$, podemos também escrever esta equação na forma

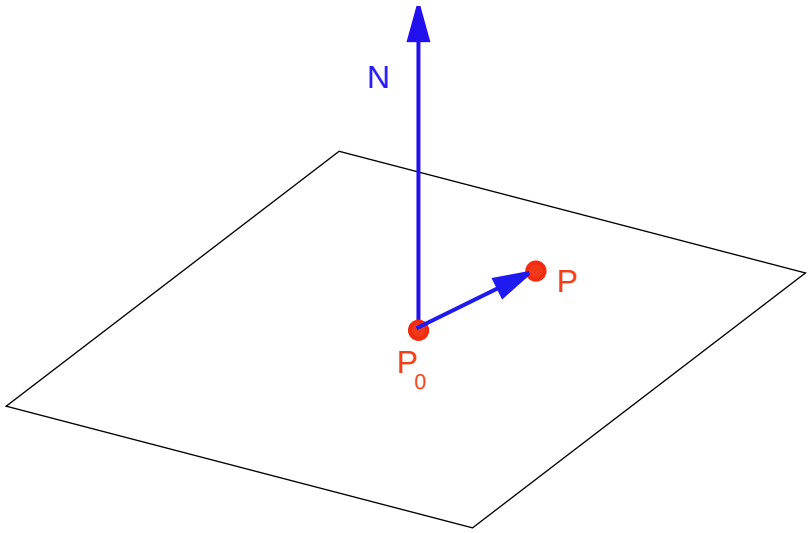
$$y = mx + d$$

($m = -B/A$ e $d = -C/A$.) Neste caso, a **inclinação** da reta é o ângulo entre 0 e 180° dado por $\arctan m$. Se $A = 0$, então a inclinação da reta é 90°.Uma reta no plano é determinada de forma única por sua inclinação e por um de seus pontos.

Equações de Planos

Equação Geral do Plano

No espaço, a inclinação de um plano é dada por um vetor perpendicular a ele: um plano no espaço é determinado de forma única por um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos. Portanto, dado um vetor $N = (a, b, c)$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, existe um único plano π perpendicular ao vetor v passando pelo ponto P_0.



Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a este plano se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é perpendicular ao vetor N, ou seja, se e somente

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$$

o que equivale a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

Chamando $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, isso pode ser escrito na forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

que é chamada uma **equação geral** do plano π.

Exemplo 4. *Encontre uma equação geral para o plano perpendicular ao vetor* $N = (-1, 4, 3)$ *que passa pelo ponto* $(5, -2, 7)$*. Encontre uma equação geral para o plano perpendicular a este mesmo vetor, mas que passa pelo ponto* $(0, 0, 0)$*.*

Resposta. Uma equação geral deste plano terá a forma

$$-x + 4y + 3z + d = 0.$$

O coeficiente d será determinado pelo fato de que o ponto $(5, -2, 7)$ pertence a este plano:

$$-5 + 4(-2) + 3 \cdot 7 + d = 0 \Longrightarrow d = -8.$$

Portanto, uma equação geral para este plano será

$$-x + 4y + 3z - 8 = 0.$$

Uma equação geral para o plano perpendicular a N passando pela origem será

$$-x + 4y + 3z = 0.$$

■

Da mesma forma que dois pontos determinam uma reta, três pontos determinam um plano.

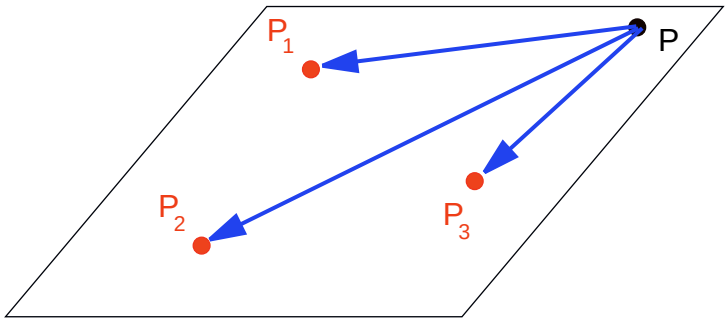
Exemplo 5. *Encontre uma equação geral para o plano* π *que passa pelos pontos* $P_1 = (5, -2, 7), P_2 = (3, 4, -1)$ *e* $P_3 = (2, 2, 2)$*.*

Resposta. Primeiro precisamos encontrar um vetor perpendicular a este plano. Como os segmentos orientados $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, por exemplo, pertencem a este plano, seu produto vetorial $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ será perpendicular ao plano:

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi.$$

Podemos então obter uma equação geral para o plano usando este vetor N e qualquer um dos pontos P_1, P_2 ou P_3, da mesma maneira que fizemos no exemplo anterior.

Outra maneira de se obter uma equação geral para o plano π é notar que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π que contém os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ se e somente se os vetores $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são coplanares.



Logo, P pertence a π se e somente se o seu produto misto é igual a zero:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right) = 0,$$

ou

$$\det \begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, uma equação geral para o plano que passa pelos pontos $P_1 = (5,-2,7), P_2 = (3,4,-1)$ e $P_3 = (2,2,2)$ é dada, como

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} x-5 & y+2 & z-7 \\ 3-5 & 4+2 & -1-7 \\ 2-5 & 2+2 & 2-7 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x-5 & y+2 & z-7 \\ -2 & 6 & -8 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \\
&= (x-5)\det \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - (y+2)\det \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} + (z-7)\det \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= 2(x-5) + 14(y+2) + 10(z-7) \\
&= 2x + 14y + 10z - 52,
\end{aligned}$$

por

$$2x + 14y + 10z - 52 = 0.$$

ou

$$x + 7y + 5z - 26 = 0.$$

■

Equação Paramétrica do Plano

Dois vetores não-colineares e um ponto determinam um plano, ou seja, existe um único plano paralelo a dois vetores não-colineares $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, passando pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a este plano se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a ambos os vetores v e w, ou seja, se e somente se $\overrightarrow{P_0P}$ é uma combinação linear de v e w, isto é,

$$\overrightarrow{P_0P} = tv + sw$$

para alguns escalares $t, s \in \mathbb{R}$. De fato, dado um vetor N perpendicular a este plano, para qualquer combinação linear $u = tv + sw$, nós temos

$$u \cdot N = t(v \cdot N) + s(w \cdot N) = 0,$$

o que mostra que o segmento orientado com ponto inicial P_0 representante de u pertence a este plano. Reciprocamente, para qualquer ponto P do plano, o segmento orientado $\overrightarrow{P_0P}$ pode ser dado como combinação linear de representantes dos vetores v e w com ponto inicial P_0, do seguinte modo: trace a partir do ponto P paralelas e estes representantes e considere as interseções destas retas paralelas com as retas suportes destes representantes; cada um destes segmentos será um múltiplo escalar dos representantes de v e w e, pela regra do paralelogramo, o segmento orientado $\overrightarrow{P_0P}$ será a soma destes múltiplos escalares.

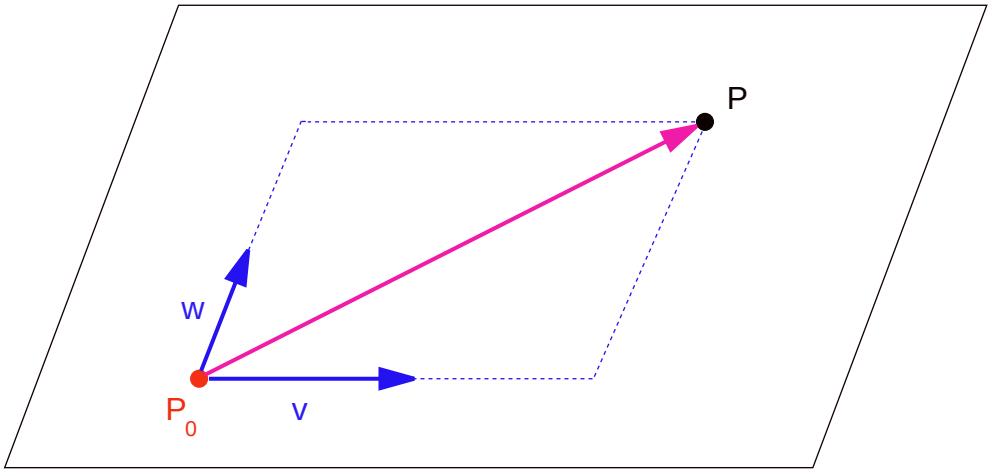
Portanto, P pertence a este plano se e somente se

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tv_1 + sw_1, tv_2 + sw_2, tv_3 + sw_3),$$

ou seja, se e somente se

$$\begin{cases} x &= x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y &= y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z &= z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases}$$

Assim, qualquer ponto P de coordenadas $(x_0 + tv_1 + sw_1, y_0 + tv_2 + sw_2, z_0 + tv_3 + sw_3) = \overrightarrow{OP_0} + tv + sw$ pertence ao plano dado. Esta equação é chamada uma **equação paramétrica do plano** π.



Exemplo 6. *Encontre uma equação paramétrica para o plano π do Exemplo 5.* $P_1 = (5, -2, 7), P_2 = (3, 4, -1)$ *e* $P_3 = (2, 2, 2)$.

Resposta. Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 6, -8)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (-3, 4, -5)$$

são vetores paralelos ao plano π, e escolhendo o ponto P_1 como um ponto pertencente ao plano, segue que uma equação paramétrica para o plano π é dada por

$$\begin{cases} x &= 5 - 2t - 3s \\ y &= -2 + 6t + 4s \\ z &= 7 - 8t - 5s \end{cases}.$$

Retas no Espaço como Interseções de Planos

Dois planos não paralelos no espaço se intersectam ao longo de uma reta.

Exemplo 7. *Encontre uma equação paramétrica para a reta r interseção dos planos*

$$\pi_1 : 5x + 2y - 3z + 9 = 0,$$
$$\pi_2 : -x + 4y - 7z + 2 = 0.$$

Resposta. Precisamos encontrar o vetor-direção desta reta e também um ponto pertencente a ela.

Como a reta r está contida em ambos os planos, ela é perpendicular a ambos os vetores normais a estes planos. Logo ela tem a mesma direção do produto vetorial destes vetores. Os vetores normais destes planos são respectivamente

$$N_1 = (5, 2, -3),$$
$$N_2 = (1, -4, 7).$$

Portanto o vetor-direção v da reta r é dado por

$$v = N_1 \times N_2 = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = i \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} - j \det \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= (2, -38, -22).$$

Como qualquer múltiplo escalar de v está na mesma direção de v podemos tomar

$$v = (1, -19, -11).$$

Falta encontrar um ponto da reta r. Ele será uma solução do sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z &= -9 \\ x - 4y + 7z &= 2 \end{cases}.$$

Note que este sistema terá infinitas soluções, já que uma reta contém um número infinito de pontos. Escalonando

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\begin{cases} x + \dfrac{z}{11} &= -\dfrac{16}{11} \\ y - \dfrac{19z}{11} &= -\dfrac{19}{22} \end{cases}$$

portanto o ponto $\left(-\dfrac{16}{11}, -\dfrac{19}{22}, 0\right)$ pertence à reta r. Logo, uma equação paramétrica para r será

$$\begin{cases} x &= -\dfrac{16}{11} + t \\ y &= -\dfrac{19}{22} - 19t \\ z &= -11t \end{cases}.$$

Podemos encontrar uma equação paramétrica para r diretamente como a solução geral do sistema: fazendo $z = t$ como o parâmetro livre, teremos

$$\begin{cases} x &= -\dfrac{16}{11} - \dfrac{1}{11}t \\ y &= -\dfrac{19}{22} + \dfrac{19}{11}t \\ z &= t \end{cases}.$$

■

Distâncias

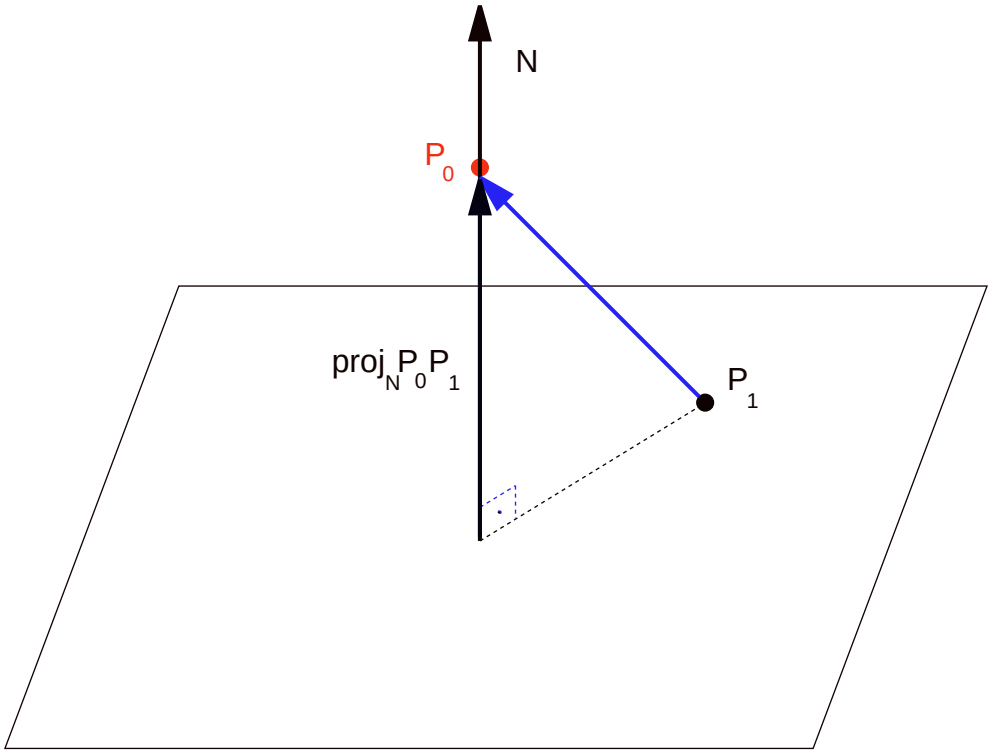
Lembre-se que a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Distância entre um Ponto e um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano.

A distância do ponto P_0 ao plano π é, por definição, a distância de P_0 ao ponto de π que está mais próximo de P_0. Traçando a reta que passa pelo ponto P_0 e é perpendicular ao plano π, esta reta vai intersectar o plano π exatamente no ponto do plano mais próximo a P_0. Isto é uma simples conseqüência do Teorema de Pitágoras, que implica entre outras coisas que o cateto de um triângulo retângulo tem sempre comprimento menor que o comprimento de sua hipotenusa.



No entanto, não precisamos encontrar este ponto específico para achar a distância P_0 a π. Como a figura acima ilustra, dado qualquer ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas componentes: uma componente na direção do vetor normal $N = (a, b, c)$ a π e outra perpendicular a N. Recorde que a componente na direção de N é a projeção ortogonal $\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}$ de $\overrightarrow{P_1P_0}$ sobre N. Então, como podemos ver pela figura,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \left\| \text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0} \right\|.$$

Como vimos anteriormente, temos $\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{\|N\|^2} N$. Segue, portanto, que

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N \right|}{\|N\|}. \tag{1}$$

Exemplo 10. Calcule a distância do ponto $P_0 = (1, 0, -2)$ ao plano $\pi : 2x - 3y + 5z - 10 = 0$.

Resposta: Primeiro precisamos encontrar um ponto do plano π. Fazendo $x = y = 0$ na equação de π, encontramos $z = 2$. Portanto $P_1 = (0, 0, 2)$ pertence ao plano π. Logo, como $\overrightarrow{P_1P_0} = (1, 0, -2) -$

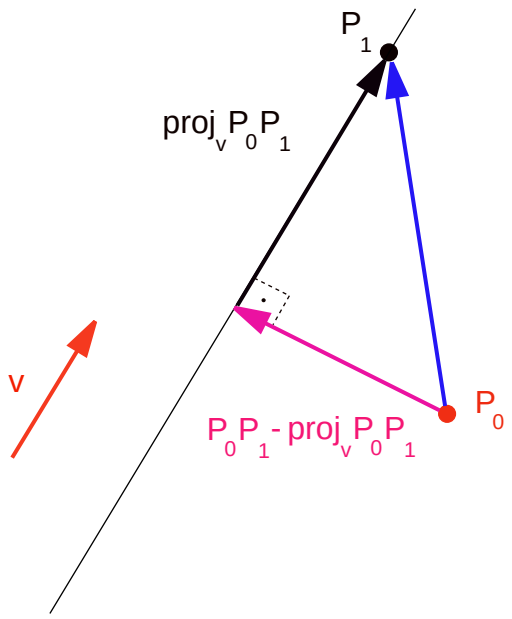
$(0,0,2) = (1,0,-4)$, temos

$$\operatorname{dist}(P_0, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N\right|}{\|N\|} = \frac{|(1,0,-4)\cdot(2,-3,5)|}{\|(2,-3,5)\|} = \frac{|2-20|}{\sqrt{4+9+25}} = \frac{18}{\sqrt{38}}.$$

Distância entre um Ponto e uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e r uma reta.

A distância do ponto P_0 a reta r é, por definição, a distância de P_0 ao ponto de r que está mais próximo de P_0. Traçando a reta que passa pelo ponto P_0 e é perpendicular a reta r, esta reta vai intersectar a reta r exatamente no ponto de r mais próximo a P_0, mais uma vez pelo fato de que o cateto de um triângulo retângulo tem sempre comprimento menor que o comprimento de sua hipotenusa.



Mais uma vez, não é necessário encontrar este ponto para achar a distância entre P_0 e r. Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas componentes: uma componente na direção do vetor-direção v da reta r e outra perpendicular a v. Vemos da figura que

$$(\operatorname{dist}(P_0, r))^2 + \left\|\operatorname{proj}_v \overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2,$$

portanto, como

$$\left\|\operatorname{proj}_v \overrightarrow{P_1P_0}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot v\right|}{\|v\|}$$

segue que, se θ é o ângulo entre $\overrightarrow{P_1P_0}$ e v, temos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{dist}(P_0,r))^2 &= \left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 - \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot v\right|^2}{\|v\|^2} \\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 \|v\|^2 - \left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 \|v\|^2 \cos^2\theta}{\|v\|^2} \\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 \|v\|^2 (1-\cos^2\theta)}{\|v\|^2} \\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|^2 \|v\|^2 \sin^2\theta}{\|v\|^2} \\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\times v\right\|^2}{\|v\|^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{dist}(P_0,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\times v\right\|}{\|v\|}. \tag{2}$$

Exemplo 11. Calcule a distância do ponto $P_0 = (1,0,-2)$ a reta r dada pela equação paramétrica

$$\begin{cases} x &= 2-3t \\ y &= 1-t \\ z &= -5t \end{cases}$$

Resposta: Primeiro precisamos encontrar um ponto da reta r. Fazendo $t=0$ na equação de r, obtemos $P_1 = (2,1,0)$ pertencente a r. Em segundo lugar, um vetor na direção de r é $(-3-1,-5)$ ou mesmo $(3,1,5)$. Logo, como $\overrightarrow{P_1P_0} = (1,0,-2)-(2,1,0) = (-1,-1,-2)$, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_0}\times v &= \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} i - \det\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} j + \det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} k \\
&= (-3,-1,2),
\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{dist}(P_0,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\times v\right\|}{\|v\|} = \frac{\sqrt{9+1+4}}{\sqrt{9+1+25}} = \sqrt{\frac{14}{35}}.$$

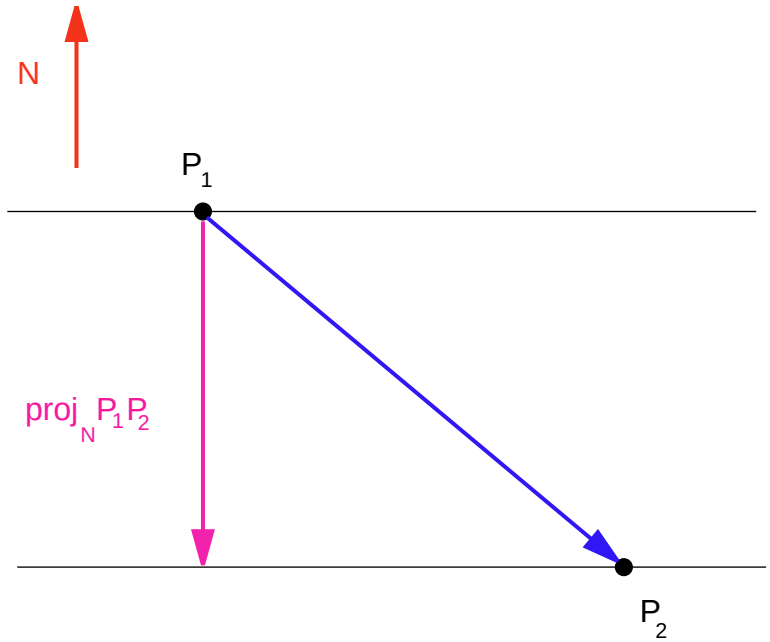
Distância entre Dois Planos

Sejam dois planos quaisquer π_1 e π_2. A distância entre eles é definida como a menor de todas as distâncias entre todos os pares possíveis de pontos formados por um ponto pertencente ao plano π_1 e o outro ponto pertencente ao plano π_2. Em linguagem matemática,

$$\operatorname{dist}(\pi_1,\pi_2) = \min\left\{\operatorname{dist}(P_1,P_2) : P_1\in\pi_1 \text{ e } P_2\in\pi_2\right\}.$$

Em particular, se os planos não são paralelos, e portanto se intersectam ao longo de uma reta, ou se eles são coincidentes, temos $\operatorname{dist}(\pi_1,\pi_2) = 0$.

Se eles são paralelos e não coincidem, mais uma vez não é necessário encontrar os pares de pontos pertencentes a estes planos que se encontram a menor distância um do outro (note que há um número infinito de tais pontos: quaisquer dois pontos dos planos que estão em uma reta perpendicular aos planos realiza a distância mínima). Escolha dois pontos quaisquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, pertencentes aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Seja N um vetor normal a qualquer um dos planos (como eles são paralelos, seus vetores normais são também paralelos. Então, como vemos na figura (os planos estão vistos em perfil),



$$\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \left\| \operatorname{proj}_N \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot N \right|}{\|N\|}.$$

Exemplo 12. Calcule a distância entre os planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 6y + 10z - 10 = 0$.

Resposta: Note que estes dois planos são paralelos, com $(2, -3, 5)$ um vetor normal a ambos os planos, já que $(4, -6, 10) = 2(2, -3, 5)$. Eles não são coincidentes, pois $2x - 3y + 5z - 5 = 0$ é também uma equação para o segundo plano. Precisamos agora encontrar um ponto de cada plano. Fazendo $x = y = 0$ em ambas as equações, encontramos $z = -\frac{1}{5}$ na primeira e $z = 1$ na segunda. Portanto $P_1 = (0, 0, -\frac{1}{5}) \in \pi_1$ e $P_2 = (0, 0, 1) \in \pi_2$. Logo $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 0, \frac{6}{5})$

$$\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|(0, 0, \frac{6}{5}) \cdot (2, -3, 5)\right|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \frac{6}{\sqrt{38}}.$$

Distância entre Duas Retas

Sejam duas retas quaisquer r_1 e r_2. A distância entre elas é definida como a menor de todas as distâncias entre todos os pares possíveis de pontos formados por um ponto pertencente a reta r_1 e o outro ponto pertencente a reta r_2. Em linguagem matemática,

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \min \{\operatorname{dist}(P_1, P_2) : P_1 \in r_1 \text{ e } P_2 \in r_2\}.$$

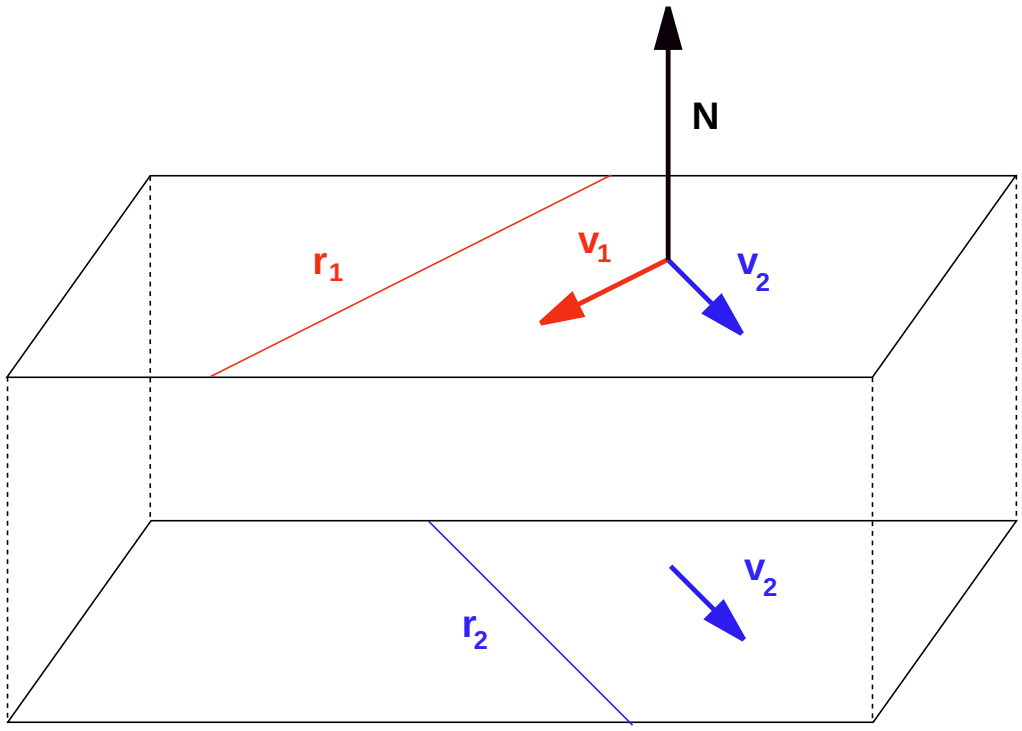
Em particular, se as duas retas se intersectarem em um ponto ou forem coincidentes, temos $\text{dist}(r_1, r_2) = 0$. Existem duas situações possíveis em que a distância entre duas retas é diferente de zero: ou elas são paralelas mas não coincidentes, ou elas são reversas. No plano, duas retas que não se intersectam são necessariamente paralelas. No espaço podemos ter situações em que duas retas não se tocam mas tem direções diferentes.

Distância entre Retas Paralelas

Neste caso, a distância entre as duas retas é simplesmente a distância entre um ponto de uma reta e a outra reta. Ou seja, se r_1 e r_2 são duas retas paralelas, $\text{dist}(r_1, r_2)$ é a distância $\text{dist}(P_1, r_2)$ entre um ponto qualquer $P_1 \in r_1$ e a reta r_2, ou também a distância $\text{dist}(P_2, r_1)$ entre um ponto qualquer $P_2 \in r_2$ e a reta r_1.

Distância entre Retas Reversas

Se r_1 e r_2 são duas retas reversas, podemos sempre encontrar planos paralelos π_1 e π_2 que contêm respectivamente r_1 e r_2. Para encontrar π_1, faça uma translação de r_2 até que ela intersecte r_1; como r_1e r_2 têm direções diferentes, esta reta translação de r_2 e a reta r_2 são concorrentes, logo determinam um plano que, porque contém a reta translação de r_2, é paralelo a r_2. Usando o mesmo procedimento podemos encontrar o plano π_2. Como estes planos são paralelos a ambas as retas, eles são paralelos um ao outro. Em particular, se v_1 e v_2 são os vetores-direção das retas r_1 e r_2, o vetor $N = v_1 \times v_2$ é normal a ambos os planos π_1 e π_2.



Portanto, a distância entre as retas reversas r_1 e r_2 é exatamente a distância entre os dois planos paralelos π_1 e π_2. Logo, se $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$, temos que

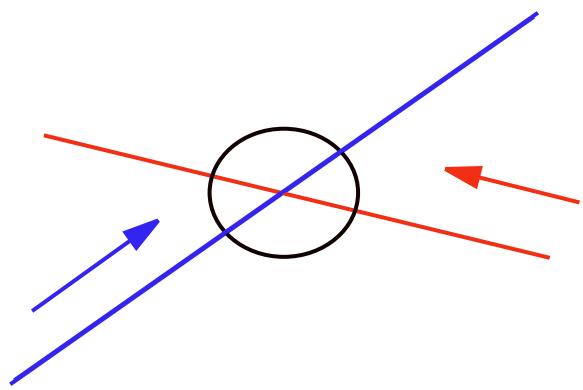
$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N\right|}{\|N\|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (v_1 \times v_2)\right|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Ângulos entre Retas e Planos

Ângulos entre Duas Retas

Se duas retas são paralelas, evidentemente o ângulo entre elas é 0. Se duas retas r_1 e r_2 são concorrentes, com vetores-direção v_1 e v_2, elas formam quatro ângulos, sendo que ângulos opostos são iguais, logo não há mais que dois valores diferentes. Por definição, o ângulo θ entre elas é definido como sendo o menor entre eles. Em particular, o ângulo entre duas retas nunca pode ser obtuso; ele é sempre um ângulo agudo ou no máximo um ângulo reto. Assim, ele **não é** em geral o ângulo entre os vetores diretores das retas (a não ser que os vetores diretores tenham sido escolhidos nas direções corretas; na figura abaixo, por exemplo, o ângulo entre os vetores diretores mostrados é obtuso, logo o ângulo entre as retas não é o ângulo entre eles). Portanto, ele pode ser calculado através da fórmula

$$\theta = \arccos \frac{|v_1 \cdot v_2|}{\|v_1\| \, \|v_2\|}.$$

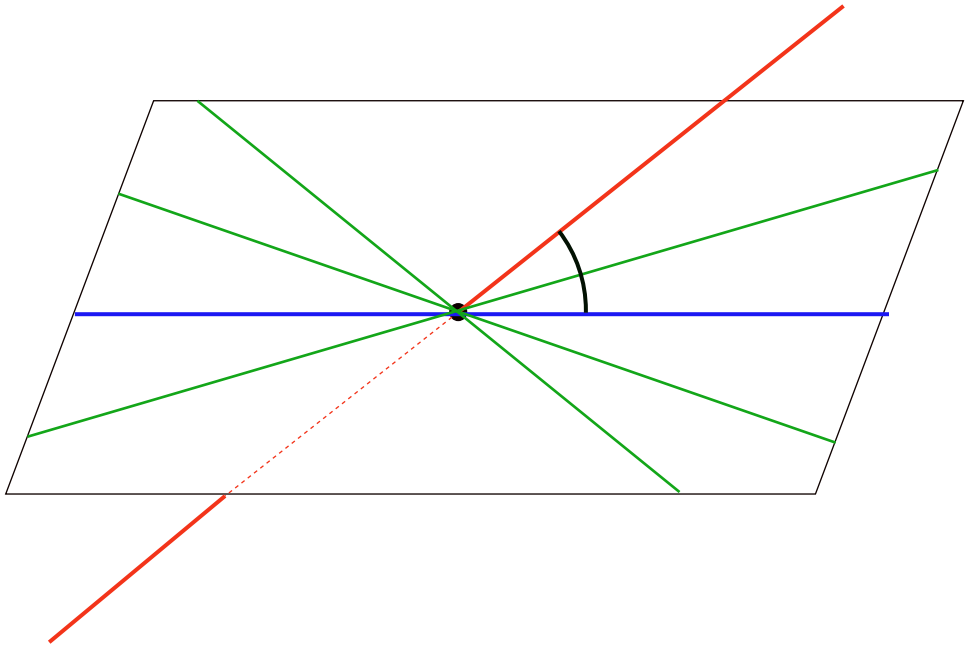


O ângulo entre retas reversas pode ser definido como o ângulo entre uma destas retas e a translação da outra que é concorrente à primeira; logo, ele também é dado pela fórmula acima.

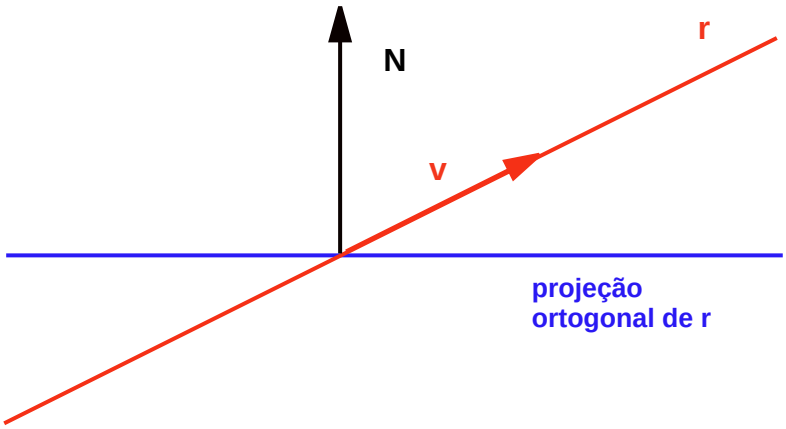
Ângulos entre uma Reta e um Plano

O ângulo entre uma reta e um plano paralelo à ela é evidentemente 0. Se a reta r não é paralela ao plano π, então ela o intercepta em um único ponto. Existem infinitas projeções da reta sobre o plano, dependendo da direção em que se projeta r sobre o plano π . O ângulo entre a reta r e cada uma de suas projeções pode ser calculado como na subseção anterior, pois é o ângulo entre duas retas. Este ângulo é diferente para cada projeção escolhida. No entanto, entre estes ângulos, existe um único que é o menor de todos. Este é precisamente o ângulo entre a reta r e a sua projeção ortogonal. Por definição, este será também o ângulo entre a reta r e o plano π.

A figura a seguir ilustra várias projeções da reta r (em vermelho) sobre o plano π; a projeção ortogonal é a reta em azul (as outras projeções estão em verde)e portanto o ângulo entre r e π é o ângulo entre r e esta projeção, como denotado na figura.



Este ângulo pode ser facilmente calculado, uma vez que se considera a figura abaixo, mostrando a situação em perfil (isto é, a reta r e sua projeção ortogonal sobre o plano π estão ambas exibidas em perfil). O vetor normal N ao plano e o vetor diretor v da reta foram escolhidos de tal modo que o ângulo entre eles e o ângulo entre r e a sua projeção ortogonal são complementares (ou seja, sua soma é $\pi/2$).



Portanto, se v é um vetor diretor para a reta r e N é um vetor normal para o plano π, então o ângulo entre r e π é dado por

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|v \cdot N|}{\|v\| \, \|N\|}.$$

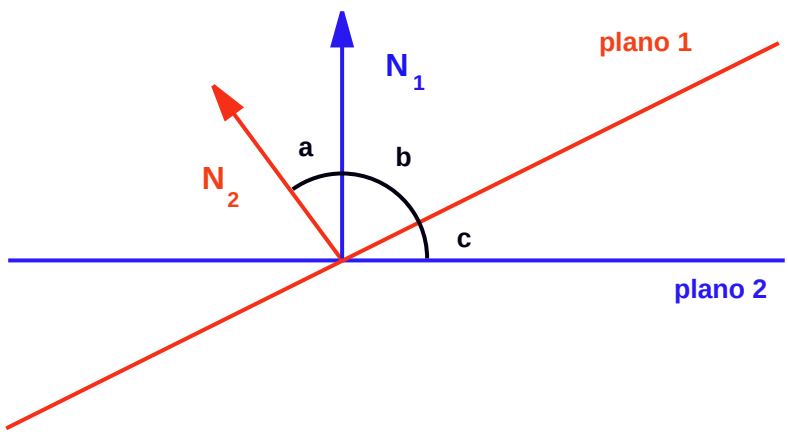
Ângulos entre Dois Planos

O ângulo entre dois planos paralelos é evidentemente 0. O ângulo entre dois planos concorrentes π_1 e π_2 é simplesmente o ângulo entre eles vistos de perfil. Este ângulo é exatamente o menor ângulo entre os seus vetores normais N_1 e N_2:

$$\theta = \arccos \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\| \, \|N_2\|}.$$

De fato, observe a figura abaixo, onde os planos estão mostrados em perfil, a é o ângulo entre os vetores normais dos planos escolhidos de tal forma que eles formam um ângulo agudo (escolha que sempre podemos fazer, pois se na escolha inicial eles formam um ângulo obtuso, basta inverter o sentido de um dos vetores normais) e c é o ângulo entre os planos. Como N_2 é perpendicular ao plano 2 e N_1 é perpendicular ao plano 1, temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} a + b &= 90, \\ b + c &= 90. \end{aligned}$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos

$$a = c.$$