Aula: Equações polinomiais

Turma 1 e 2
Data: 05/09/2012 - 12/09/2012

Tópicos

- Equações polinomiais.
- Teorema fundamental da álgebra.
- Raízes reais e complexas.
- Fatoração e multiplicação de raízes.
- Relações de Girard.

Equações polinomiais

Denominamos equações polinomiais ou algébricas, às equações da forma: $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau $n > 0$. As raízes da equação algébrica, são as mesmas do polinômio $P(x)$. O grau do polinômio, será também o grau da equação. Exemplos:

$$\begin{aligned} x^4 + 9x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ x^{10} + 6x^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Números Complexos

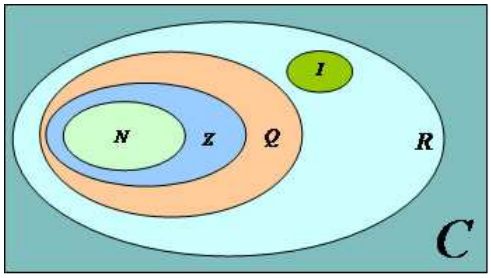
Relembremos que o corpo dos números complexos é o conjunto $C = \{(x, y) : x, y \epsilon \Re\}$, com as seguintes operações de adição e multiplicação:

Se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencem a C, então $z + w = (x + a,\ y + b)$ e $z \cdot w = (xa - yb,\ xb + ya)$. (Os elementos de C são chamados de números complexos. Denotamos o número complexo (0, 0) simplesmente por 0 e o número complexo (1, 0) simplesmente por 1. Para cada $z = (x, y) \epsilon C$, definimos $-z = (-x, -y)$ e $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Os números complexos podem ser escrito da forma (a, b) ou $a + bi$.

- Números Naturais: N
  $N = \{0, 1, 2, 3...\}$
- Números Inteiros: Z
  $Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Números Racionais : Q
  $Q = \{..., -5.2, ... - 4.1, ... - 1, ..., 0, ..., 2, 65, ...\}$
- Números Irracionais: I
  Números decimais que não podem ser escritos na forma de fração, ex: $2.33(3)$
- Números Reais: $\Re = Q + Z + I + N$

A equação quadrática $x^2 + 1 = 0$ não tinha solução dentre o sistema de números reais porque não há um número real cujo quadrado seja -1. Como solução ao problema, foi introduzido um novo tipo de número, o conjunto denominado *números complexos.* No século 16, o símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido para dar solução à equação. Este símbolo, depois denominado i, foi considerado como um número fictício ou imaginário que pode ser manipulado algebricamente como um número real, exceto porque seu quadrado é -1.

Os números complexos são dados em pares ordenados, (a, b), onde os números a e b são chamados de componentes. A primeira componente, a, é a parte real, e a segunda componente, b, é a parte imaginaria.



Raízes reais e complexas

Para resolver estas é equações é preciso encontrar as raízes do polinômio. As raízes de um polinômio podem ser reais e/ou complexas.

- Propriedades importantes:
  - Toda equação algébrica de grau n possui n raízes. Exemplo: a equação $x^3 - x = 0$ possui 3 raízes, a saber: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$. Dizemos então que o conjunto verdade ou conjunto solução da equação dada é $S = \{0, 1, -1\}$.
  - Se b for raiz de $P(x) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $x - b$. Esta propriedade é muito importante para abaixar o grau de uma equação, o que se consegue dividindo $P(x)$ por $x - b$.
  - Se o número complexo $a + bi$ for raiz de $P(x) = 0$, então o conjugado $a - bi$ também será raiz.
  - Se a equação $P(x) = 0$ possuir k raízes iguais a m então dizemos que m é uma raiz de multiplicidade k. Exemplos: a equação $(x - 4)^{10} = 0$ possui 10 raízes iguais a 4. Portanto 4 é raiz décupla ou de multiplicidade 10. A equação $x^3 = 0$, possui três raízes iguais a 0 ou seja três raízes nulas com ordem de multiplicidade 3.
  - Se a soma dos coeficientes de uma equação algébrica $P(x) = 0$ for nula, então 1 é raiz da equação. Exemplo: 1 é raiz de $40x^5 - 10x^3 + 10x - 40 = 0$, pois a soma dos coeficientes é igual a zero.
  - Toda equação de termo independente nulo admite um número de raízes nulas igual ao menor expoente da variável. Exemplo: a equação $3x^5 + 4x^2 = 0$ possui duas raízes nulas.

Teorema Fundamental do Álgebra

Em 1799, Gauss provou que toda equação polinomial da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$

onde $a_0, ..., a_n$ são números reais arbitrários, com $a_i \neq 0$, tem uma solução entre os números complexos se $n \geq 1$. Este é o teorema fundamental da álgebra.

Como encontrar as raízes...

- Polinômio grau 1:

$$ax + b = 0$$

Resolvemos isolando a variável:

$$x = \frac{b}{a}$$

- Polinômio grau 2:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para encontrar as raízes usamos a fórmula,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Produtos especiais:

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\
(x-a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\
(x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\
(x-a)^3 &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
(x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 \\
(x-a)^4 &= x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x+a)^n &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \cdots \\
&\quad + na^{n-1}x + a^n
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
(x+a)^5 &= x^5 + 5ax^{5-1} + \frac{5(5-1)}{2!}a^2x^{5-2} + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}a^3x^{5-3} + \\
&\quad + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}a^4x^{5-4} + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3(5-4))}{5!}a^5x^{5-5} \\
&= x^5 + 5ax^4 + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}a^2x^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}a^3x^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^4x + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^5 \\
&= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5
\end{aligned}$$

- Fatoração por agrupamento:

$$\begin{aligned} acx^3 + adx^2 + bcx + bd &= ax^2(cx+d) + b(cx+d) \\ &= \left(ax^2+b\right)(cx+d) \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 &= x^2(3x-2) - 2(3x-2) \\ &= \left(x^2-2\right)(3x-2) \end{aligned}$$

- Fatoração de polinômios de terceiro grau ou de grau superior: Divisão

  Existe uma certa dificuldade para achar as raízes de polinômios de grau três ou superior. Entretanto, uma vez conhecido um dos zeros do polinômio, pode-se utilizar este zero para reduzir o grau do polinômio. Por exemplo, se $x-2$ é um zero do polinômio $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, sabemos que $(x-2)$ é um fator e, por divisão podemos fatorar o polinômio,

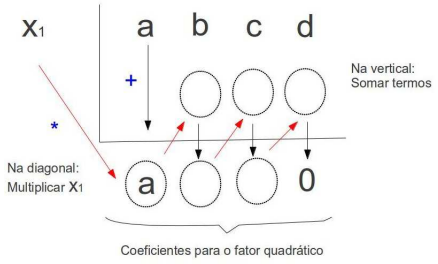
x^3	$-4x^2$	$+5x$	-2	$x-2$
$-x^3$	$+2x^2$			x^2-2x+1
0	$-2x^2$	$+5x$		
	$+2x^2$	$-4x$		
	0	x	-2	
		$-x$	$+2$	
		0	0	

O polinômio ficou reduzido da seguinte forma,

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)\left(x^2-2x+1\right)$$

Uma outra forma de fazer a redução é fazendo a **divisão sintética.**

Seja $x = x_1$ uma raíz do polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, então



Exemplo:

- Efetuando a divisão sintética no polinômio $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, utilizando o zero $x = 2$, obtemos,

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Cujo resultado é: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)\left(x^2 - 2x + 1\right)$

- Sabemos que $x = -2$ é raíz do polinômio $x^3 + 3x + 14$, fazendo a divisão sintética obtemos,

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 0 & 3 & 14 \\ & & -2 & 4 & -14 \\ \hline & 1 & -2 & 7 & 0 \end{array}$$

onde $x^3 + 3x + 14 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 7\right)$. Mesmo que alguns coeficientes sejam zero devem ser considerados como coeficientes para fazer a divisão.

- Teorema do Zero Racional

Se um número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros do tipo $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$ então p é divisor a_n de e q é divisor de a_0.

Exemplo: Encontre todos os zeros reais da expressão $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

$a_0 = 2$: então $q = \pm 2, \pm 1$

$a_n = 3$: então $p = \pm 3, \pm 1$

Os zeros racionais possíveis são:

$$\frac{p}{q} = 1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$$

testando o zeros possíveis, vemos que $x = 1$ é um deles,

$$2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 0$$

realizando a divisão sintética

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & -8 & 3 \\ & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

pelo que $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x-1)\left(2x^2 + 5x - 3\right)$. Resolvendo a quadrática,

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \\ &= \frac{-5 \pm 7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

E fatorando, $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x-1)(x+3)(2x-1)$.

Fatoração e multiplicação de raízes

Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são raízes da equação $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$, então ela pode ser escrita na forma fatorada: $a_o(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdots(x-x_n) = 0$. Exemplo: Se -1, 2 e 53 são as raízes de uma equação do 3º grau, então podemos escrever: $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-53) = 0$, que desenvolvida fica: $x^3 - 54x^2 + 51x + 106 = 0$.

Relações de Girard

São as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica. Para uma equação do 2º grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, já conhecemos as seguintes relações entre os coeficientes e as raízes x_1 e x_2:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Para uma equação do 3º grau , da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes, temos as seguintes relações de Girard:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

Para uma equação do 4º grau, da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, sendo as raízes iguais a x_1, x_2, x_3 e x_4, temos as seguintes relações de Girard:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 &= \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= -\frac{d}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= \frac{e}{a} \end{aligned}$$

NOTA: observe que os sinais se alternam a partir de (-) , tornando fácil a memorização das fórmulas

Exercícios

1. Encontre o complexo conjugado de $(2 + 8i)$e $(4 - 7i)$.
2. A soma $(5 + 7i) + (3 - 2i)$ vale?
3. O produto $(5 + 7i)(3 - 2i)$ vale:
   (a) 1 + 11i
   (b) 1 + 31i
   (c) 29 + 11i

(d) 29 - 11i

(e) 29 + 31i

4. Se $f(z) = z^2 - z + 1$, então $f(1-i)$ é igual a?

5. Sendo i a unidade imaginaria, $(1-i)^{-2}$ é igual a?

6. Desenvolva o seguintes produtos especiais.

   (a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

   (b) $\left(x^2 - 5\right)^2 = x^4 - 10x^2 + 25$

   (c) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

   (d) $(x-1)^3 = x^3 - 3x + 3x^2 - 1$

   (e) $(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

   (f) $(x-4)^4 = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$

7. Aplique a fórmula quadrática para achar todos os zeros dos seguinte polinômios.

   (a) $4x^2 + 6x + 1$: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

   (b) $x^2 + 6x + 9$: $x_{1,2} = -3$

   (c) $2x^2 - 6x + 5$: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4}$

8. Resolver as equações $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ e $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ usando o teorema do Zero Racional, e escreva a equação como sendo a multiplicação de fatores.

9. Determine o valor de k na equação x^2–$kx + 36$ =0, de modo que uma das raízes seja o quádruplo da outra.

10. (ITA-SP) Os números a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Nessas condições, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.