Planos e Retas

Uma abordagem exploratória das Equações do Plano e da Reta

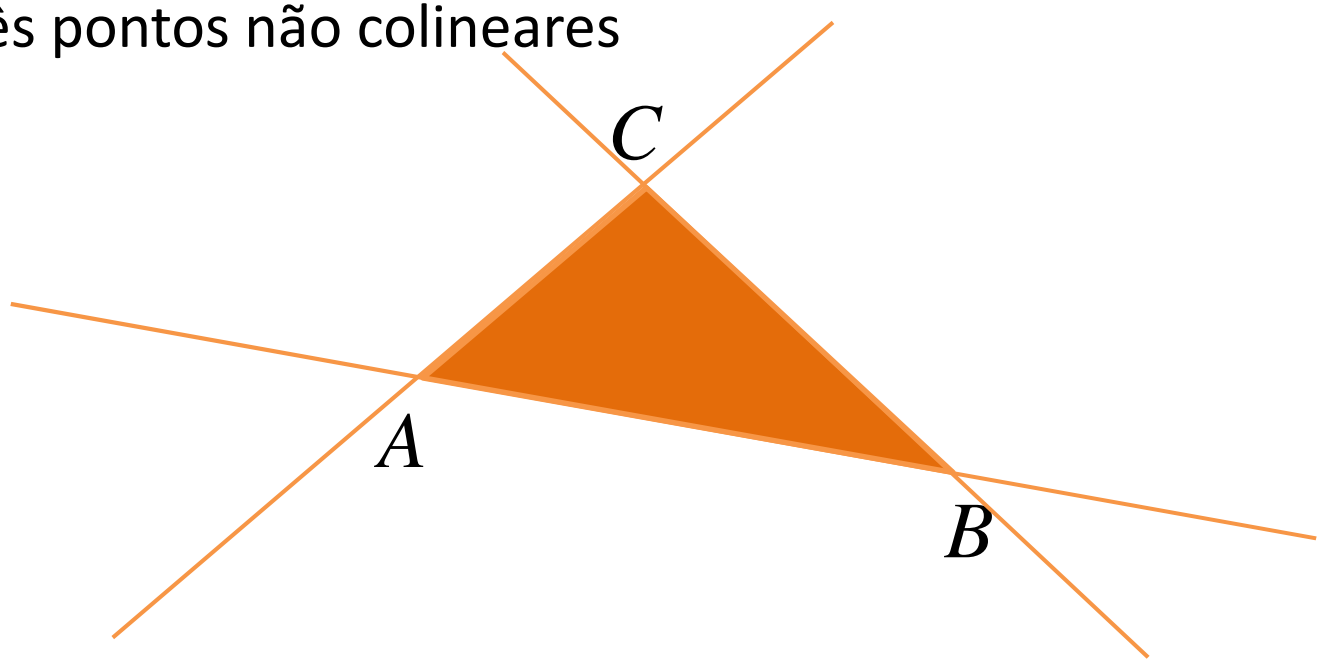
Anliy Natsuyo Nashimoto Sargeant

José Antônio Araújo Andrade

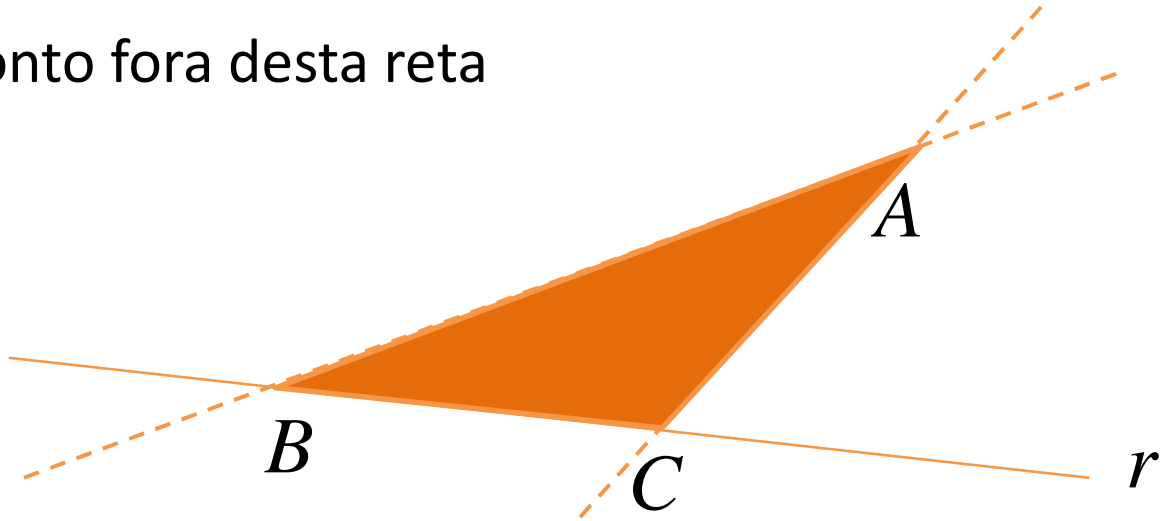
Solange Gomes Faria Martins

Na geometria, um plano é determinado se são dados:

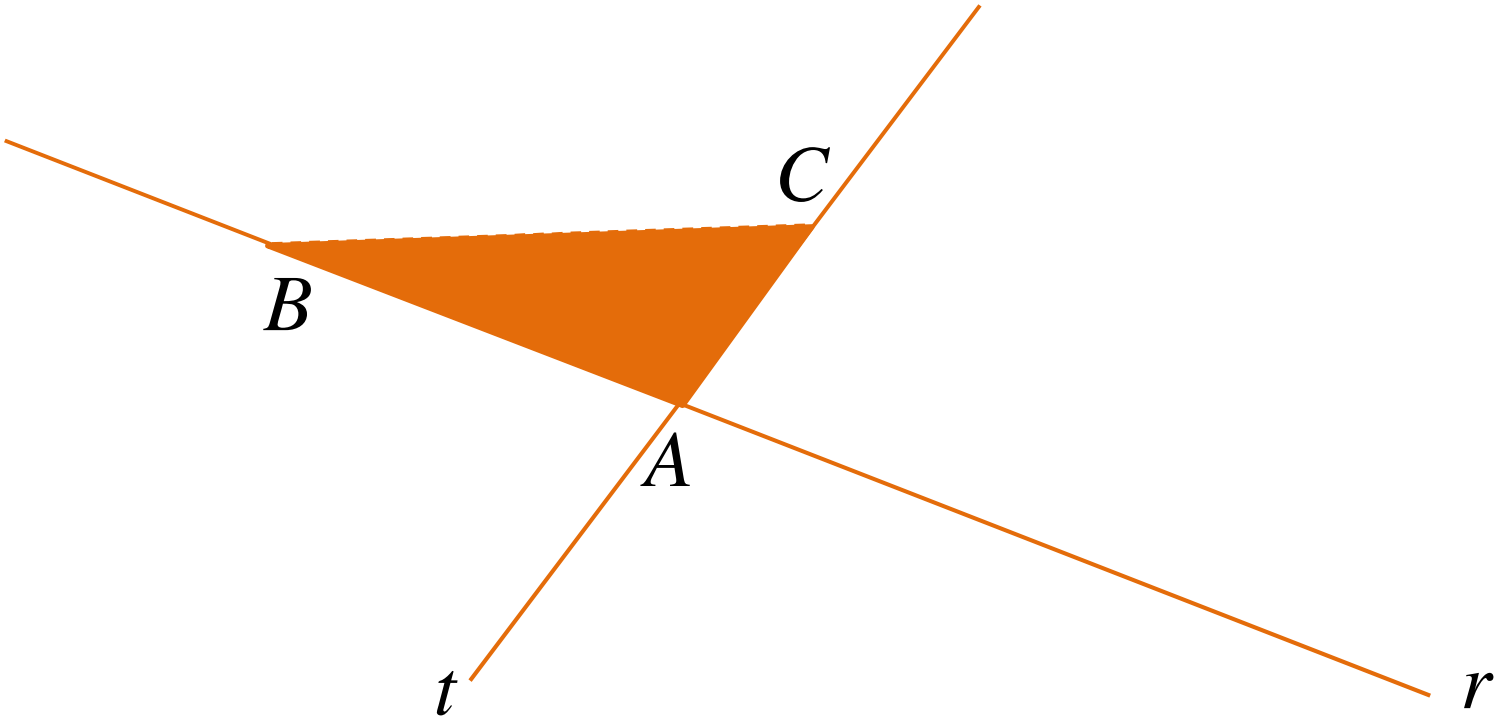
- três pontos não colineares



- uma reta e um ponto fora desta reta



- duas retas não coincidentes e que se interceptam em um único ponto (duas retas distintas,concorrentes).



- uma direção normal (vetor perpendicular ao plano) e um ponto desse plano.

EQUAÇÕES DO PLANO

<u>Equação Geral do Plano</u>

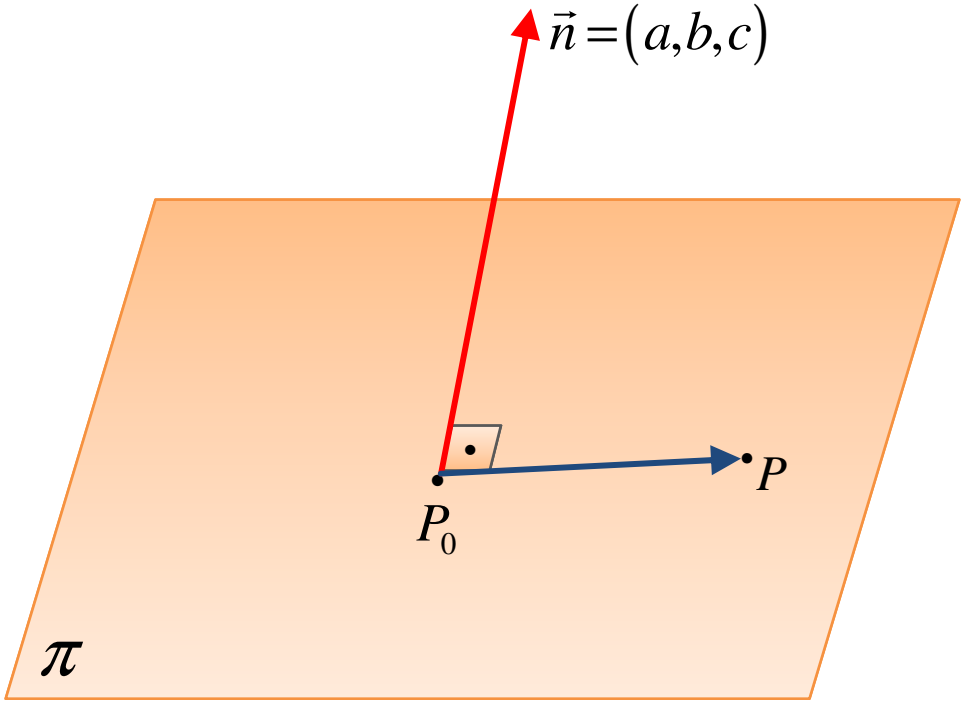
No plano a equação geral de uma reta é

$$ax + by + c = 0$$

No espaço um plano é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é caracterizada por um vetor perpendicular a ele, chamado **vetor normal ao plano** e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor normal e um de seus pontos.



<u>Exemplo 1</u>:

Sabemos que:

- dois pontos determinam a equação de uma reta;

Analogamente,

- três pontos não colineares determinam a equação de um plano;

Sejam $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (1,4,1)$ e $P_3 = (2,8,-4)$ pontos não colineares. A equação do plano que contém esses pontos pode ser definida por um sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ a + 4b + c + d = 0 \\ 2a + 8b - 4c + d = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' = L_3 - 2L_1]{L_2' = L_2 - L_1} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3'' = L_3' - 2L_2'} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ \quad 2b - 2c \qquad = 0 \\ \qquad -6c - d = 0 \end{cases}$$

fazendo $c = \alpha$, temos:

- em (iii): $-6\alpha - d = 0 \Rightarrow d = -6\alpha$
- em (ii): $2b - 2\alpha = 0 \Rightarrow b = \alpha$
- em (i): $a + 2\alpha + 3\alpha - 6\alpha = 0 \Rightarrow a = \alpha$

Portanto, $\vec{s} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ -6\alpha \end{bmatrix}$, assim,

para qualquer valor real que atribuímos a α (exceto α igual a zero), iremos obter uma equação do plano que contém os pontos P_1, P_2 e P_3.

<u>Verificação</u>:

- Se $\alpha = 1$,

$$x + y + z - 6 = 0$$

- Se $\alpha = 2$,

$$2x + 2y + 2z - 12 = 0$$

- Se $\alpha = -5$,

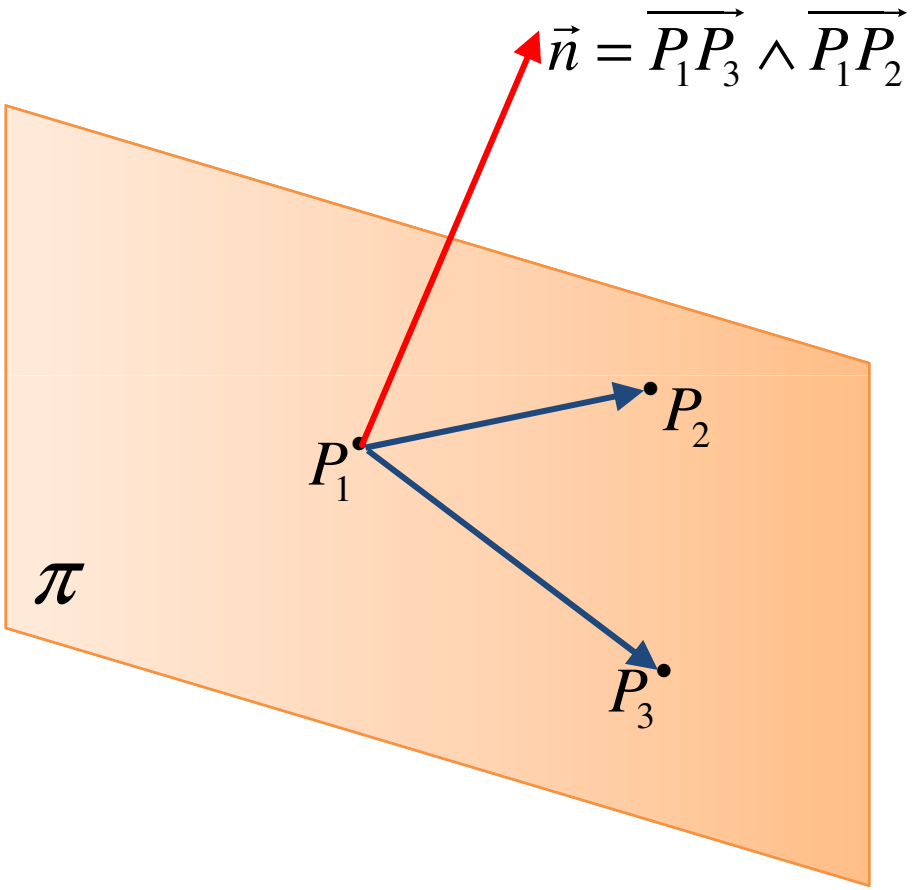
$$-5x - 5y - 5z + 30 = 0$$

$\vdots$

- Se $\alpha = \mathbb{R}^*$,

$$\alpha x + \alpha y + \alpha z - 6\alpha = 0$$

No entanto, com esses três pontos (P_1, P_2 e P_3 não colineares), podemos determinar a equação do plano π, que os contém, de outra maneira:



Determinando as componentes do vetor $\vec{n}$, conheceremos os coeficientes a, b e c da equação do plano $(\pi : ax + by + cz + d = 0)$:

$$\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_3} \wedge \overrightarrow{P_1P_2}} \quad (\mathrm{I})$$

antes, vamos determinar as componentes dos vetores $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (2,8,-4) - (1,2,3) = (1,6,-7)$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,4,1) - (1,2,3) = (0,2,-2)$$

retornando a relação (I):

$$\vec{n} = (1,6,-7) \wedge (0,2,-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \left(\det\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \vec{n} = (2,2,2)$$

deste modo, podemos escrever:

$$\boxed{\pi : 2x + 2y + 2z + d = 0} \ (\mathrm{II})$$

para determinar d e conhecer a equação geral do plano π, basta substituirmos as coordenadas de um dos três pontos do plano, que já conhecemos, em (II):

$$2x + 2y + 2z + d = 0$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + d = 0 \ \Rightarrow \ d = -12$$

Logo,

$$\pi : 2x + 2y + 2z - 12 = 0$$

ou

$$\pi : x + y + z - 6 = 0$$

Proposição: A equação geral de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ é

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

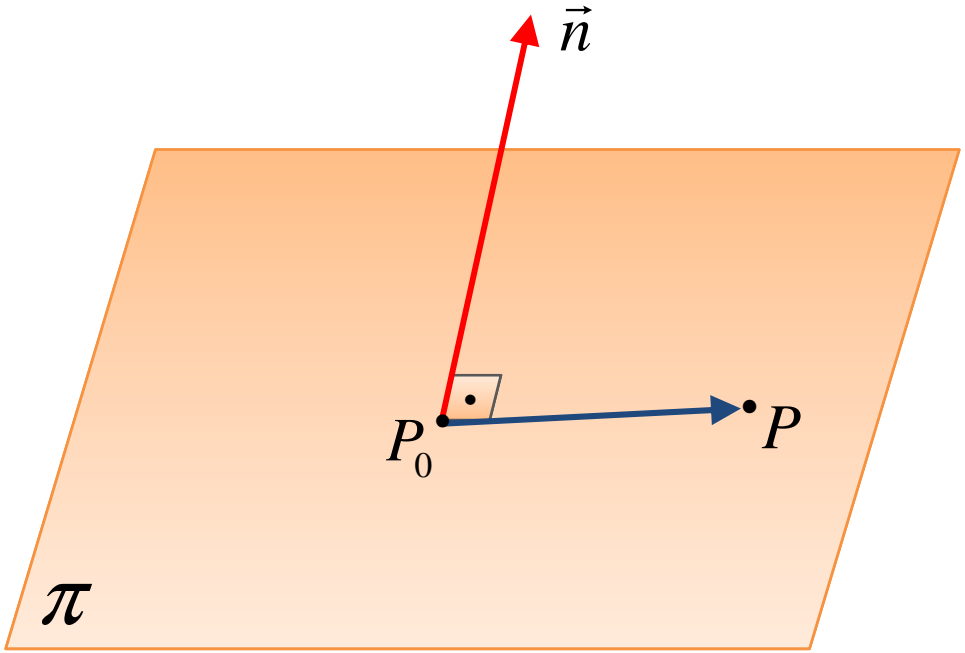
Demonstração:

Se $\vec{n} = (a, b, c)$ é a direção normal de um plano π que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a $\vec{n}$, o que equivale a,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$$

ou

$$\boxed{P \in \pi \Leftrightarrow (P - P_0) \perp \vec{n}}$$



Pela proposição, sabemos que:

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n},$$

então,

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0} \quad (\mathrm{I})$$

considerando que $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) =$

$= (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, em (I):

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

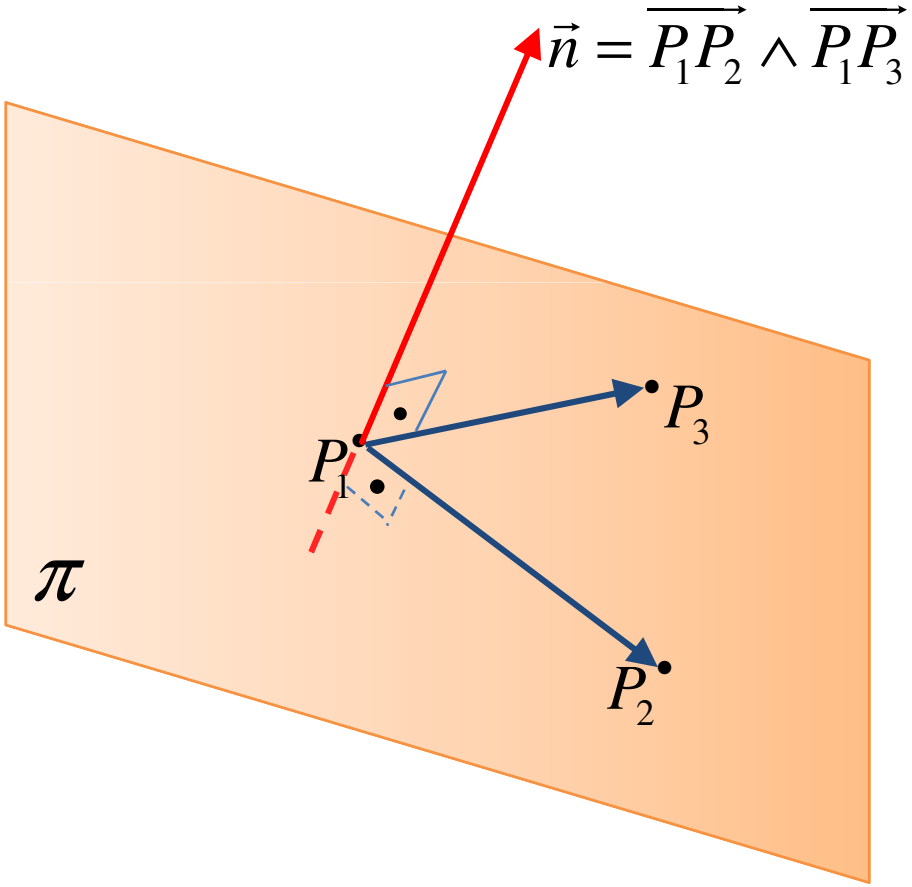
sendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, temos:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Equação geral do plano π

<u>Exemplo 2</u>: Encontre a equação do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (1,1,-2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (4,2,3)$.

<u>Exemplo 3</u>: Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), P_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $P_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



determinando as componentes dos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

determinando as componentes do vetor $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \wedge \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \left(\det\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

assim, a equação do plano π pode ser escrita como:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0$$

escolhendo o ponto $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right)$, encontramos d:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{1}{8}$$

Logo, a equação geral do plano π que passa pelos pontos P_1, P_2 e P_3 é:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}=0$$

multiplicando toda a equação por 8

$$2x+2y+4z-1=0$$

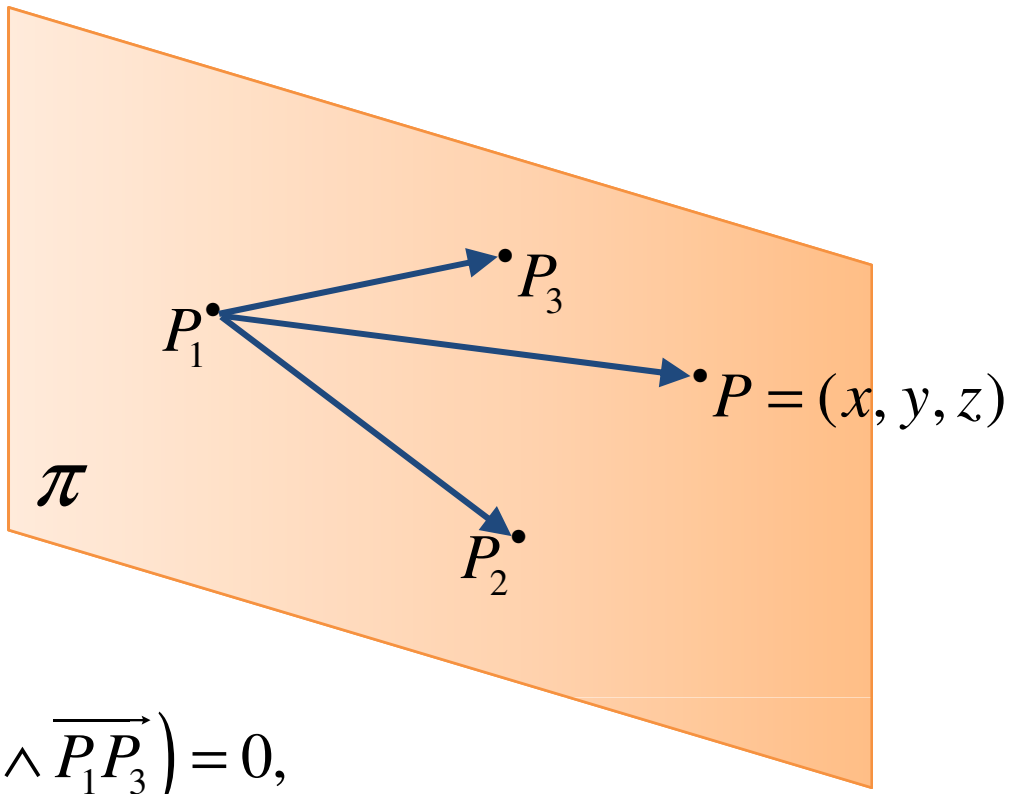
Retornando ao **<u>Exemplo 3</u>**: Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $P_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Para resolver este problema podemos usar o seguinte ***<u>corolário</u>***:

Sejam $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Estes vetores são **coplanares** (isto é, são paralelos a um mesmo plano) se, e apenas se,

$$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0$$

e ainda, o fato de que este resultado é usado para verificar se quatro pontos são coplanares. Vejamos:



Seja $\overrightarrow{P_1P} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}\right)}_{\vec{n}} = 0,$

precisamos determinar as componentes dos vetor $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$:

$$\overrightarrow{P_1P} = P - P_1 = (x, y, z) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(x - \frac{1}{2}, y, z\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

assim,

$$\overrightarrow{P_1P}\cdot\left(\overrightarrow{P_1P_2}\wedge\overrightarrow{P_1P_3}\right)=0,$$

$$\det\begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc:cc} x-\frac{1}{2} & y & z & x-\frac{1}{2} & y \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]=0$$

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}z\right]-\left(-\frac{1}{4}z+0-\frac{1}{4}y\right)=0$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}=0$$

multiplicando toda a equação 8

$$2x+2y+4z-1=0$$

Ou Seja,

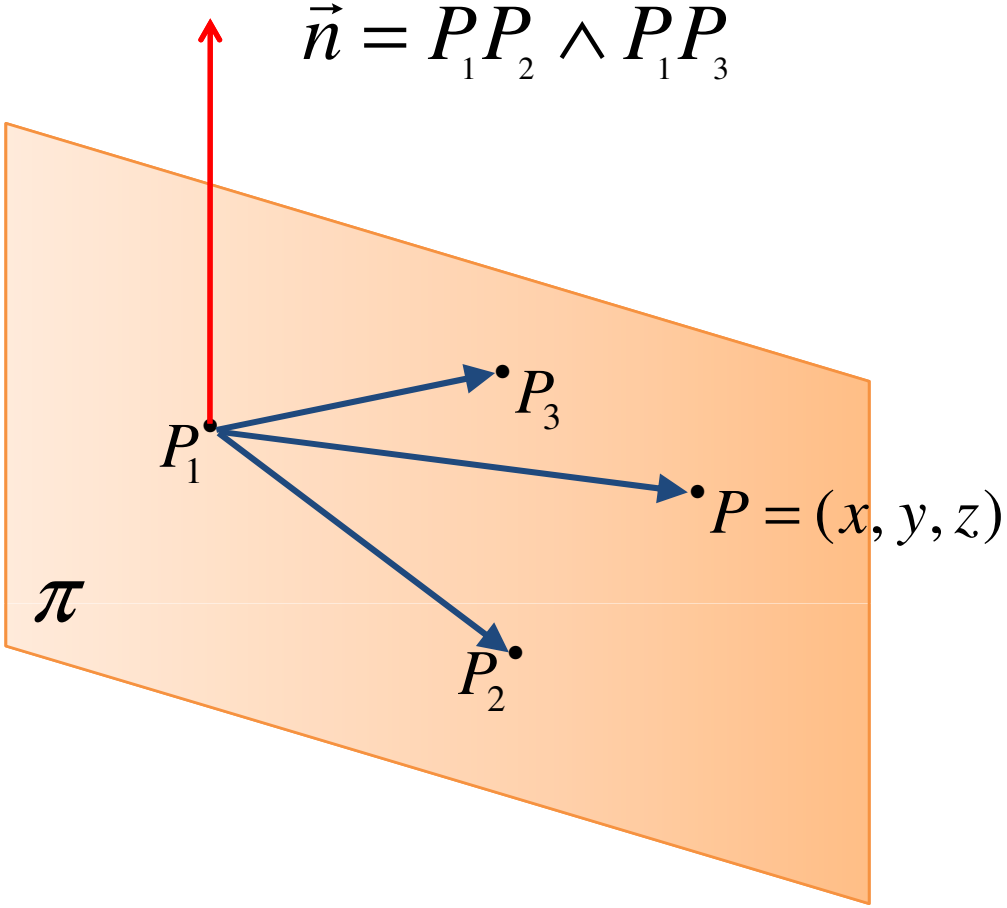
dados três pontos P_1, P_2 e P_3 (não colineares) de um plano, qualquer ponto $P = (x, y, z)$ deste plano pode ser determinado se são considerados:

- três vetores $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$
- e que os vetores $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são coplanares se, e somente se

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3} \right) = 0$$

(produto misto)

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$$



$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}\right)}_{\vec{n}} = 0$$

Equações Paramétricas

Consideremos:

- um plano π;
- um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tal que $P_0 \in \pi$;
- os vetores: $\left.\begin{array}{r} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{array}\right\}$, tais que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não sejam paralelos e que $[\vec{v}, \vec{w}] // \pi$.

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja, se existem escalares t e s tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} + s\vec{w}$$

$$P \in \pi \iff \underbrace{\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} + s\vec{w}}_{\text{Combinação Linear}}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} + s\vec{w}$$ Equação vetorial do plano π.

$$\left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) = t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)$$

$$\left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) = (v_1 t, v_2 t, v_3 t) + (w_1 s, w_2 s, w_3 s)$$

Logo, um ponto $P = \left(x, y, z\right)$ pertence a π se, e somente se, satisfaz as equações

$$\begin{cases} x - x_0 = v_1 t + w_1 s \\ y - y_0 = v_2 t + w_2 s \\ z - z_0 = v_3 t + w_3 s \end{cases} \sim \begin{cases} x = x_0 + v_1 t + w_1 s \\ y = y_0 + v_2 t + w_2 s \\ z = z_0 + v_3 t + w_3 s \end{cases} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas do plano π

<u>Exemplo 4</u>: Podemos obter equações paramétricas do plano do **<u>Exemplo 2</u>** usando o fato de que ele passa pelo ponto $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y = 0 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}s \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}$$

<u>Exemplo 5</u>: Encontre as equações paramétricas do plano $4x+2y+3z=0$.

Para encontrarmos as equações paramétricas deste plano podemos proceder como no caso de sistemas lineares e considerar as variáveis *y* e *z* livres:

$z=t$

e

$y=s$. Assim,

$x=-\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}s$ e, portanto, $\begin{cases} x=-\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}s \\ y=s \\ z=t \end{cases}$

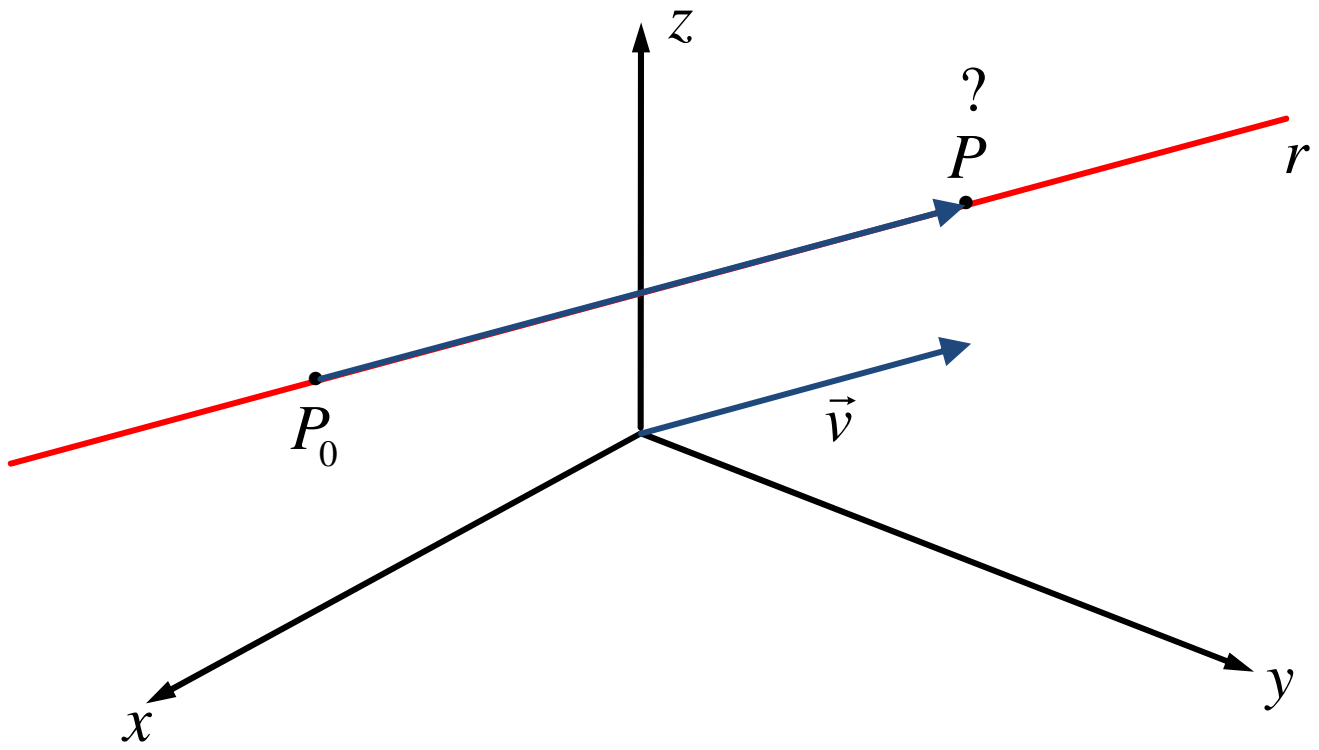
são equações paramétricas do plano. Destas equações obtemos que os vetores $\vec{v}=\left(-\frac{3}{4},0,1\right)$ e $\vec{w}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$ que são paralelos ao plano.

EQUAÇÕES DA RETA

Equações Paramétricas

Consideremos:

- um reta *r*;
- um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tal que $P_0 \in r$;
- um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, tal que $\vec{v} \,//\, r$;
- um ponto qualquer do espaço $P = (x, y, z)$.



Neste caso:

$$P \in r \iff (P - P_0) // \vec{v}$$

ou

$$P \in r \iff \overrightarrow{P_0P} // \vec{v}$$

isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\Downarrow$$

$$P - P_0 = t\vec{v} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 + t\vec{v}$$

Equação vetorial de r.

escrevendo (I) em termos de suas componentes

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$$

$$P - P_0 = t(a,b,c)$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (ta, tb, tc)$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (at, bt, ct)$$

Logo, a reta r pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \sim \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas de uma reta r, que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$. O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor da reta** r.

<u>Exemplo 6</u>: As seguintes equações são equações paramétricas de uma reta r.

$$r:\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = 10-t \end{cases}$$

(a) Calcule dois pontos e um vetor diretor de r.

(b) Verifique se $P = \left(\frac{7}{2}, 0, \frac{19}{2}\right)$ e $Q = (5,1,8)$ pertencem r.

Equações na forma Simétrica

Consideremos agora uma reta dada por suas equações paramétricas

$$r:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ sendo $a, b \text{ e } c$ não-nulos

calculando t nas três equações, obtemos

$$t = \frac{x - x_0}{a} \qquad t = \frac{y - y_0}{b} \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{x - x_0}{c} = \frac{y - y_0}{c} = \frac{z - z_0}{c}}$$

<u>Exemplo 7</u>: Dada as equações

$$\frac{3x-2}{7}=\frac{1-y}{4}=z+5$$

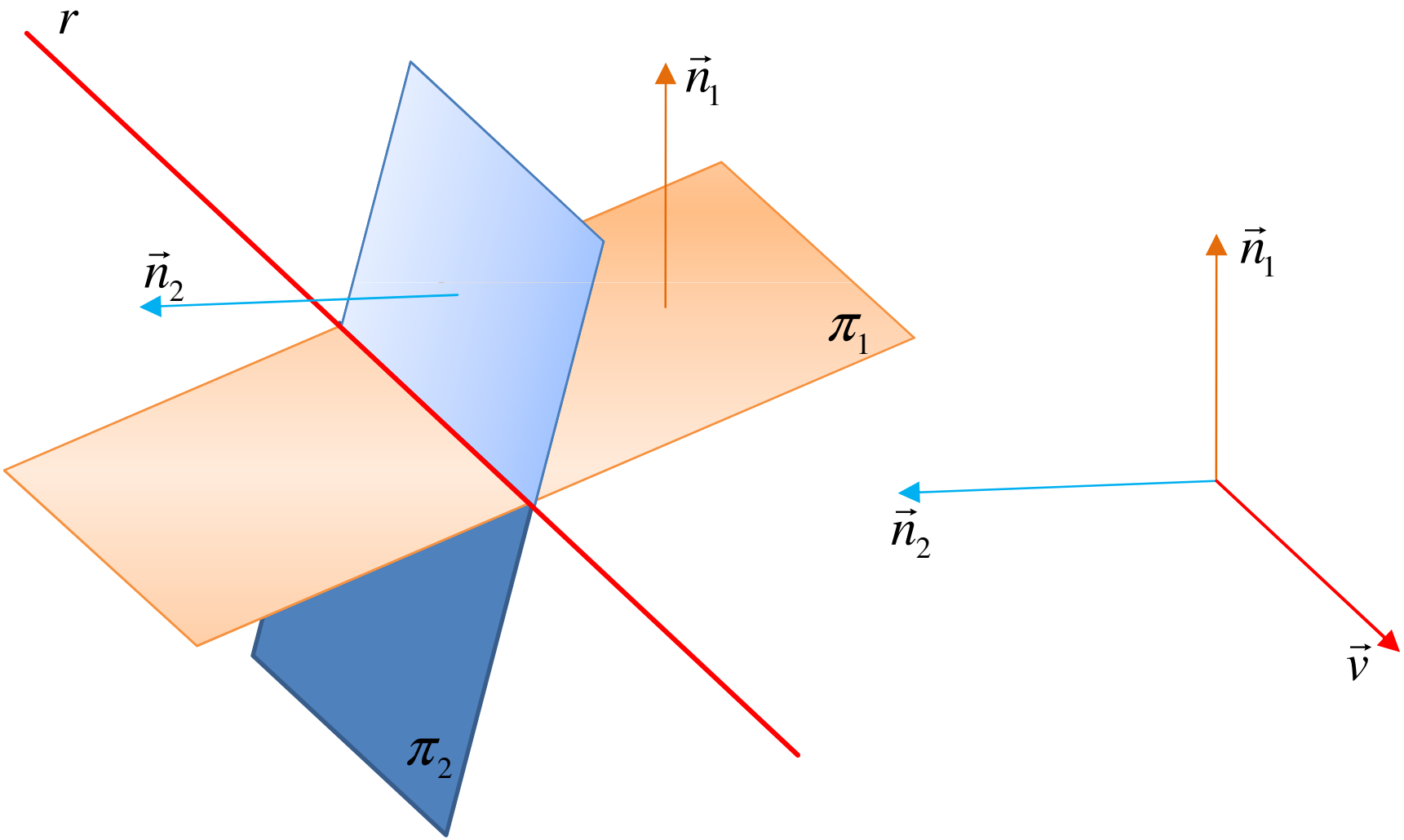
mostre que elas representam uma reta, e dê um ponto e um vetor diretor da mesma.

<u>Exemplo 8</u>: Encontre as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $P_1=(3,0,2)$ e $P_2=(0,3,3)$.

<u>Exemplo 9</u>: Encontre as equações paramétricas da reta r, interseção dos planos

$$\pi_1 : -2x + y + 4z = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + 2z = 0$$



Se $\vec{n}_1 \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 \perp \pi_2$ e $r = (\pi_1 \cap \pi_2)$, ou seja, $r \subset [\pi_1, \pi_2]$; então, $r \perp [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ e como $r // \vec{v}$, pois $\vec{v}$ é vetor diretor de r, então

$$\vec{v} \perp [\vec{n}_1, \vec{n}_2], \text{ isto é,}$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

$$\vec{v} = (-2,1,4) \wedge (2,-1,2)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \left(\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\vec{v} = (6,12,0)$$

Precisamos de um ponto da reta r. podemos encontrá-lo considerando o fato de que um ponto comum aos planos π_1 e π_2 também é um ponto da reta r.

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Como ambos os planos passam pela origem, ou seja, como se trata de um sistema homogêneo, então o ponto $P_0 = (0,0,0)$ pertence a reta r. Logo,

$$\begin{cases} x = 0 + 6t \\ y = 0 + 12t \\ z = 0 + 0t \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6t \\ y = 12t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

<u>Exemplo 10</u>: Ache as equações paramétricas da reta r_3 que intercepta as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : \; x - 2 = \frac{y-4}{2} \;\text{ e }\; z = 3$$

e é perpendicular a ambas.