UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
ÁLGEBRA LINEAR
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÕES LINEARES
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique se são operadores lineares no espaço $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$:

   (a) F: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf^{'}(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

   (b) F: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f^{'}(t) + t^2 f^{''}(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

CONCLUSÕES

Vamos verificar se valem as condições para que uma função, cujo domínio e contra-domínio são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares, seja uma transformação linear.

(a) F: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf^{'}(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.
Considere $g, h \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ constante, observemos que: $F(g(t) + kh(t)) = F((g + kh)(t)) = t(g + kh)^{'}(t) = tg^{'}(t) + t(kh)^{'}(t) = tg^{'}(t) + tk(h)^{'}(t) = F(g(t)) + kF(h(t))$. Logo, podemos concluir que F definida acima é uma transformação linear.

(b) F: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f^{'}(t) + t^2 f^{''}(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.
Considere $g, h \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, constante, observemos que: $F(g(t) + kh(t)) = F((g + kh)(t)) = t(g+kh)^{'}(t) = (g+kh)^{'}(t) + t^2(g+kh)^{''}(t) = g^{'}(t) + (kh)^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) + t^2(kh)^{''}(t) = g^{'}(t) + k(h)^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) + t^2 k(h)^{''}(t) = g^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) + k(h)^{'}(t) + t^2 k(h)^{''}(t) = F(g(t)) + kF(h(t))$. Logo, podemos concluir que F definida acima é uma transformação linear.

Obs: Em vez de trabalharmos com o espaço vetorial $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, de dimensão $n+1$, poderíamos subtituí-lo pelo espaço $C^{\infty}(\mathbb{R})$, de dimensão infinita, e o raciocínio seria análogo.

2. Seja $u = (x, y, z, t)$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$. Quais das aplicações abaixo definidas são aplicações lineares do $\mathbb{R}^4$?

   (a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$;

   (b) $F(u) = (1, 0, 1, 1)$;

   (c) $F(u) = (x, y - z, y + z, x + t)$;

   (d) $F(u) = (cosx, y, z, t)$.

   RESPOSTAS

   (a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$. Observe que tal função não poderia ser linear, pois $F((0, 0, 0, 0)) = (0, 0, 0, 0) + (1, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$. Observe ainda que F, como definida acima, não satisfaz nenhuma das duas condições para uma função, cujos domínios e contra-domínios são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares, seja linear.

   (b) $F(u) = (1, 0, 1, 1)$. Observe que tal função não poderia ser linear, pois $F((0, 0, 0, 0)) = (1, 0, 1, 1) \neq (0, 0, 0, 0)$. Observe ainda que F, como definida acima, é tal que $F(ku) = (1, 0, 1, 1) \neq ku, \forall k \in (\mathbb{R} - \{1\})$ ou $\forall u \in (\mathbb{R}^4 - (1, 0, 1, 1))$.

   (c) $F(u) = (x, y - z, y + z, x + t)$. Sejam $u = u = (x, y, z, t)$, e $v = (x_1, y_1, z_1, w_1)$.
   F é linear pois, 1)$F(u + v) = F((x, y, z, t) + (x_1, y_1, z_1, t_1)) = F(x + x_1, y + y_1, z + z_1, t + t_1)$, ou seja, $F(x + x_1, y + y_1, z + z_1, t + t_1) = (x + x_1, (y + y_1) - (z + z_1), (y + y_1) + (z + z_1), (x + x_1) + (t + t_1)) = (x, y - z, y + z, x + t) + (x_1, y_1 - z_1, y_1 + z_1, x_1 + t_1) = F(u) + F(v)$.
   2)$F(ku) = F((x, y, z, t)) = (kx, k(y - z), k(y + z), k(x + t)) = k(x, y - z, y + z, x + t) = kF(u)$.

   (d) $F(u) = (cosx, y, z, t)$. F não é linear pois a função cosseno não é uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

3. É possível existir uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Por quê?.

   CONCLUSÕES

   Não é possível existir uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Nuc(T)) + dim(Im(T)) \leq dim(Nuc(T)) + 2$, portanto $3 \leq 2 + dim(Nuc(T)) \Leftrightarrow dim(Nuc(T)) \geq 1$, ou seja, T não pode ser injetiva.
   Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, T transformação linear onde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. T não pode ser injetora.

   Observe que estamos trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita. O Teorema do Núcleo e da Imagem **NÃO É NECESSARIAMENTE VÁLIDO** para transformações cujos domínios sejam espaços vetoriais de dimensão infinita. Ver Apêndice I.

4. É possível existir uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Por quê?.

CONCLUSÕES

Não é possível existir uma uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que $dim(\mathbb{R}^2) = dim(Nuc(T)) + dim(Im(T))$, portanto $dim(Im(T)) \leq 2$, ou seja, T não é pode ser sobrejetora já que a dimensão do espaço contra-domínio é 3, $Im(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, T transformação linear onde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. T não pode ser sobrejetora.

Observe que estamos trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita. O Teorema do Núcleo e da Imagem **NÃO É NECESSARIAMENTE VÁLIDO** para transformações cujos domínios sejam espaços vetoriais de dimensão infinita. Ver Apêndice I.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, transformação linear. Mostre que se T não é sobrejetora, então T não é injetora.

CONCLUSÕES

Basta aplicarmos o Teorema do Núcleo de da Imagem, se T não é sobrejetiva,$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, temos $dimIm(T) < 2 \Leftrightarrow dimNuc(T) > 0$ (pois dim Nuc(T) = 2 - dim (Im(T))), pelo Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem), ou seja, T não é injetiva.
Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, T transformação linear. T não é sobrejetora $\Leftrightarrow$ T não é injetora. **Vale o resultado mais geral: Todo operador linear, entre espaços de dimensão finita, é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo. Daí um operador linear injetivo é sobrejetivo e vice-versa e, portanto é um automorfismo. Isto é uma conseqüência do Teorema do Núcleo e da Imagem.**

Observe que estamos trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita. O Teorema do Núcleo e da Imagem **NÃO É NECESSARIAMENTE VÁLIDO** para transformações cujos domínios sejam espaços vetoriais de dimensão infinita. Ver Apêndice I.

6. Considere a transformação linear

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \quad \text{dada por} \quad T(x,y,z) = (z, x-y, -z).$$

(a) Determine uma base do núcleo de T.

(b) Dê a dimensão da imagem de T.

(c) T é sobrejetora? Justifique.

(d) Faça um esboço de $KerT$ e ImT.

CONCLUSÕES

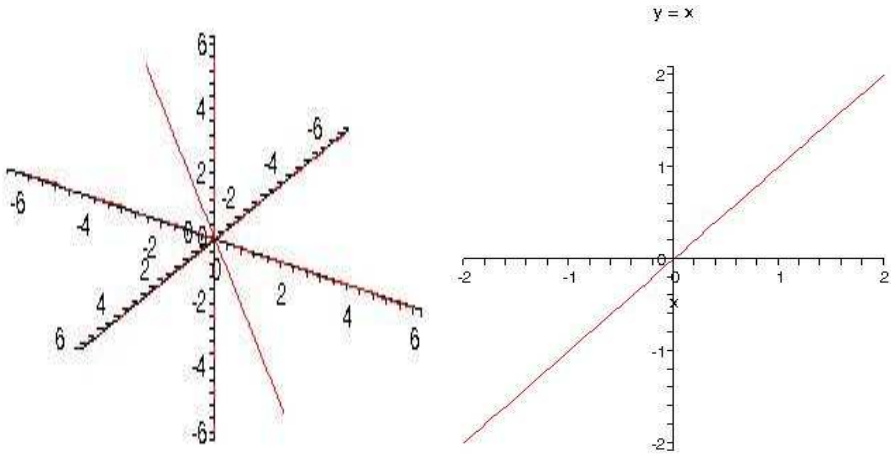
(a) $Ker(T) = \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = (0,0,0)\}$, ou seja, $Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (z, x-y, -z) = (0,0,0)\}$, portanto $v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x,y,z)$, onde $x = y$ e $z = 0$, ou seja, $v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x,x,0)$. Logo $Ker(T) = [(1,1,0)]$.

(b) Pelo Teorema do núcleo e da Imagem, temos que $dim(\mathbb{R}^3) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$, portanto $3 = 1 + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(Im(T)) = 2$.

(c) T não é sobrejetora pois a dimensão do espaço contra-domínio é 3 $(= dim(\mathbb{R}^3))$ e $dim(Im(T)) = 2$, ou seja, $Im(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

(d) $v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x,x,0)$, ou seja, $Ker(T) = [(1,1,0)]$. Portanto, $Ker(T) = \{P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_0, y_0, z_0) = t \cdot (1,1,0)$ para algum $t \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $Ker(T)$ é a reta, contida em $\mathbb{R}^3$, que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1,1,0)$.

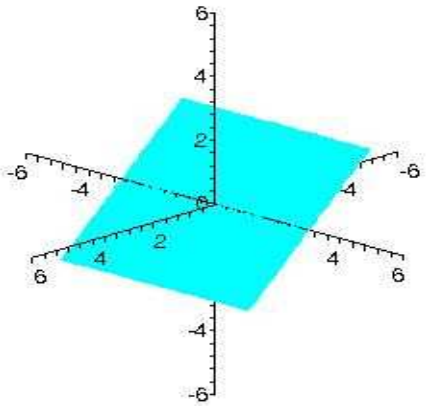
Esboço de $Ker(T)$:



$Im(T) = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = w\}$. Observemos que pela expressão de T, $T(x,y,z) = (z, x-y, -z) = z \cdot (1,0,-1) + (x-y) \cdot (0,1,0)$ portanto, $Im(T) = [(1,0,-1),(0,1,0)]$. Observemos também que $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ é L.I.(linearmente independente).

$Im(T)$ é o plano que passa pelos pontos $(0,0,0)$ (origem), $(1,0,-1)$ e $(0,1,0)$.

Esboço de $Im(T)$:



7. Tome em $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ as bases $\beta = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ e $\beta' = \{1,\ 1+t,\ t+t^2,\ t^2+t^3\}$. Calcule as matrizes $[D]_{\beta'}^{\beta}$, $[D]_{\beta}^{\beta'}$, $[D]_{\beta'}^{\beta'}$, onde $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ é o Operador derivação.

RESPOSTAS

(a) Observemos que:

$$\begin{array}{l} D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(t^2) = 2t = -2\cdot 1 + 2\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(t^3) = 3t^2 = 3\cdot 1 - 3\cdot(1+t) + 3\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3) \end{array}, \text{ daí } [D]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Observemos que:

$$\begin{array}{l} D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot(t) + 0\cdot(t^2) + 0\cdot(t^3); \\ D(1+t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(t) + 0\cdot(t^2) + 0\cdot(t^3); \\ D(t+t^2) = 1+2t = 1\cdot 1 + 2\cdot(t) + 0\cdot(t^2) + 0\cdot(t^3); \\ D(t^2+t^3) = 2t+3t^2 = 0\cdot 1 + 2\cdot(t) + 3\cdot(t^2) + 0\cdot(t^3) \end{array}, \text{ daí } [D]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Observemos que:

$$\begin{array}{l} D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(1+t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(t+t^2) = 1+2t = -1\cdot 1 + 2\cdot(1+t) + 0\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3); \\ D(t^2+t^3) = 2t+3t^2 = 1\cdot 1 - 1\cdot(1+t) + 3\cdot(t+t^2) + 0\cdot(t^2+t^3) \end{array}, \text{ daí } [D]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Seja V o espaço vetorial de matrizes 2 X 2 com base canônica

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se $T : V \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d,\ b+c)$.

(a) Ache $[T]_\alpha^\beta$ onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

CONCLUSÕES

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,0) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,1)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,1) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1,0)$$

Portanto $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ e $[S]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

CONCLUSÕES

$$S(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [2x+y,\ x-y,\ -x,\ y]^t = (2x+y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (x-y)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$-x\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix}$$

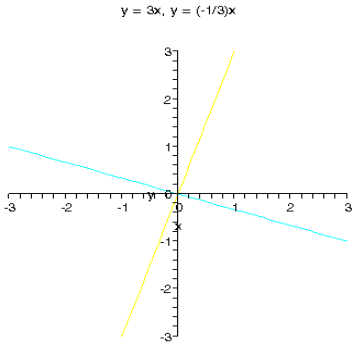
(b) Ache S e, se for possível, (a,b) tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

CONCLUSÕES

Não é possível obter (a,b) tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois $\begin{bmatrix} 2a+b & a-b \\ -a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a+b=1, a-b=0, -a=0$ e $b=1$. Observe que este sistema é impossível.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão, através da reta $y = 3x$.



(a) Encontre $T(x, y)$.

(b) Encontre uma base α de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÕES

(a) Considere no plano as retas $s : y = -\frac{1}{3}x$ e $r : y = 3x$. Observe que $s \perp r$.

Considere também $v_1 = (1, 3)$, vetor direção da reta r, e $v_2 = (-3, 1)$, vetor direção da reta s.

Observe que $\{v_1, v_2\}$ é L.I. , pois são vetores ortogonais ($s \perp r$), e portanto $\beta = \{v_1, v_2\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^2$.

$T(1, 3) = (1, 3)$, pois T é uma reflexão e portanto T preserva $v \in \mathbb{R}^2, v \parallel (1, 3)$.

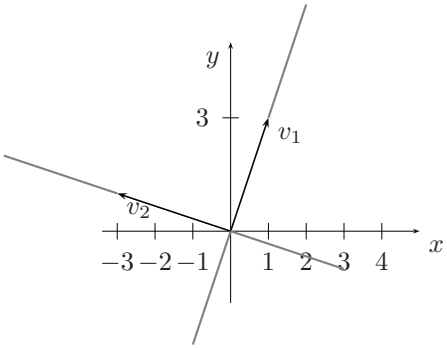
$T(-3, 1) = -(-3, 1)$. Logo, a representação matricial da Transformação acima em relação à base $\beta = \{(1, 3), (-3, 1)\}$ é: $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

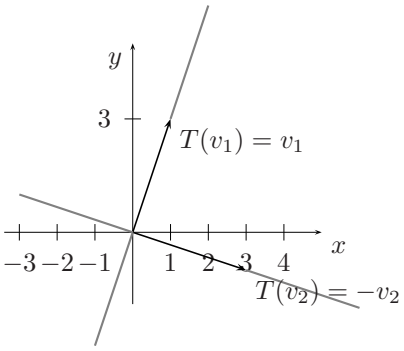
Vamos determinar a representação matricial da tranformação T, definida acima, em relação à base Canônica.

$$[T]_{can}^{can} = [I]_{can}^{\beta} \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [I]_\beta^{can} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto } T(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(b) Podemos considerar α um conjunto qualquer $\{w_1, w_2\}$ onde $w_1 \parallel (1, 3)$ e $w_2 \parallel (-3, 1)$. Em particular, poderíamos considerar $\alpha = \{(1, 3), (-3, 1)\}$.





10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde $T(v)$ é a projeção do vetor no plano $3x + 2y + z = 0$.

(a) Encontre $T(x, y, z)$.

(b) Encontre uma base ordenada β de $\mathbb{R}^3$, tal que $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CONCLUSÕES

(a) Considere $\Pi = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$ portanto, $v = (x, y, -3x - 2y) = x(1, 0, -3) + + y(0, 1, -2)$, daí $\Pi = [(1, 0, -3), (0, 1, -2)]$. Observe que o vetor (3, 2, 1) é paralelo à n_Π, a normal do plano Π. O conjunto $\beta = \{(1, 0, -3), (3, 2, 1), (0, 1, -2)\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$ e é tal que $T(1, 0, -3) = (1, 0, -3)$, $T(0, 1, -2) = (0, 1, -2)$ pois $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$, pois $(3, 2, 1) \parallel n_\Pi$.

A representação matricial da transformação T em relação à base β é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Vamos determinar a representação matricial da tranformação T, definida acima, em relação à base Canônica.

$$[T]_{can}^{can} = [I]_{can}^{\beta} \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [I]_\beta^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{9}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{13}{14} \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto, } T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{9}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{13}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(b) Encontre uma base ordenada β de $\mathbb{R}^3$, tal que $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CONCLUSÕES

Como $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(w) = 0, \forall w \parallel (3, 2, 1)$ podemos considerar $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1, v_3 \in \Pi$, tal que $\{v_1, v_3\}$ seja L.I.(linearmente independente) e $v_2 \parallel (3, 2, 1)$. Em particular, poderíamos tomar $\beta = \{(1, 0, -3), (3, 2, 1), (0, 1, -2)\}$.

11. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $3x + 2y + z = 0$.

    (a) Encontre $L(x, y, z)$.

    (b) Encontre uma base ordenada γ de $\mathbb{R}^3$, tal que $[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

CONCLUSÕES

(a) Considere $\Pi = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$ portanto, $v = (x, y, -3x - 2y) = x(1, 0, -3) + + y(0, 1, -2)$, daí $\Pi = [(1, 0, -3), (0, 1, -2)]$. Observe que o vetor (3, 2, 1) é paralelo à n_Π, a normal do plano Π. O conjunto $\beta = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2), (3, 2, 1)\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$ e é tal que $T(1, 0, -3) = (1, 0, -3)$, $T(0, 1, -2) = (0, 1, -2)$ pois $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(3, 2, 1) = -(3, 2, 1)$, pois $(3, 2, 1) \parallel n_\Pi$.

A representação matricial da transformação T em relação à base β é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

.

Vamos determinar a representação matricial da tranformação T, definida acima, em relação à base Canônica.

$$[T]_{can}^{can} = [I]_{can}^{\beta} \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [I]_\beta^{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto, } T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(b) Como $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(w) = -w, \forall w \parallel (3, 2, 1)$ podemos considerar $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1, v_2 \in \Pi$, tal que $\{v_1, v_2\}$ seja L.I.(linearmente independente) e $v_3 \parallel (3, 2, 1)$. Em particular, poderíamos tomar $\gamma = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2), (3, 2, 1)\}$.

BIBLIOGRAFIA

1. **CARVALHO**, João Pitombeira de. Uma introdução à Álgebra Linear. 2^a ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. IMPA. 1977.

2. **BOLDRINE**, José Luiz. **COSTA**, Suelli I. Rodrigues. **FIGUEREDO**, Vera Lúcia. **WETZLER**, Henry G. Álgebra Linear. 3ª edição. Editora: HARBRA ltda.

Este material foi elaborado e confeccionado pela $Prof^a$ Cláudia Ribeiro Santana (DCET-UESC).

APÊNDICE I

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda Transformação linear $T : E \to F$ tem-se $dim(E) = = dim(Nuc(T)) + dim(Im(T))$.

Dem: Ver [1] ou [2].

Corolário: Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita.
Uma transformação linear $T : E \to F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva e portanto é um isomorfismo.

Dem: Ver [1] ou [2].

O COROLÁRIO ACIMA NÃO NECESSARIAMENTE VÁLIDO NUM ESPAÇO VETORIAL DE DIMENSÃO INFINITA.

Vejamos os seguintes exemplos:

EXEMPLOS:

1. Seja $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, definida por:
   $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$. T é um operador linear injetivo que não é sobrejetivo, observe que as seqüências $(k, 0, 0, 0, \cdots) \notin Im(T), \forall k \in (\mathbb{R} - \{0\})$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, definida por:
   $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$. T é um operador linear sobrejetivo que não é injetivo, observe que $T(x_1, 0, 0, 0, \cdots) = (0, 0, 0, 0, \cdots)$ e, portanto $(x_1, 0, 0, 0, \cdots) \in Nuc(T), \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA

1. **HOFFMAN**, Kenneth & **KUNZE**, Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.
2. **LIMA**, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

Este material foi elaborado e confeccionado pela $Prof^a$ Cláudia Ribeiro Santana (DCET-UESC).

APÊNDICE II

XV Seminário Estudantil de Pesquisa - V. I - UFBA - 1996.

C5-MATEMÁTICA

TÍTULO DO TRABALHO: ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO INFINITA.

BOLSISTAS: Cláudia Ribeiro Santana - Matemática (PIBIC/CNPQ) / Maria Amélia de Pinho Barbosa - Matemática (PIBIC/CNPQ).

ORIENTADORA: Ednalva Vergasta Andrade, Instituto de Matemática, *Dept*^{o} de Matemática da UFBA.

RESUMO DO TRABALHO:

Um dos objetivos do presente trabalho foi comparar espaços vetoriais de dimensão finita com os de dimensão infinita, verificando que muitos resultados válidos para dimensão finita não são válidos se a dimensão for infinita. Sabemos que nos espaços de dimensão finita todo operador linear possui um operador auto adjunto, todo operador auto-adjunto possui uma base ortonormal formada por vetores característicos, todo funcional linear é associado a um vetor representante e que sendo W subespaço, temos $W^{\perp\perp} = W$. Buscamos em espaços vetoriais de dimensão infinita, contra-exemplos. Obtivemos exemplos de operadores sem adjunto, de um operador auto-adjunto sem vetores característicos, de um funcional linear sem representante e de um subespaço W tal que $W^{\perp\perp} \neq W$. Estudamos também algumas características e propriedades dos espaços de Hilbert e Banach, que são espaços vetoriais de dimensão infinita. Como exemplo de espaço de Hilbert, citaremos o l^2, que é um espaço normado munido de um produto interno. Neste espaço, foram estudados conceitos e resultados tais como a forma quadrática associada a um produto interno, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a lei do paralelogramo, a métrica de um espaço normado, o Teorema de Jordan Von-Neumann e a existência de um isomorfismo entre o l^2 e qualquer espaço de Hilbert de dimensão infinita que possui uma base ortonormal. Como exemplo de espaço de Banach, citaremos o espaço vetorial normado $l^p, p \geq 1, p \in \mathbb{N}$. Os elementos deste espaço satisfazem algumas condições tais como a desiguladade de Hölder, que é a forma mais geral da desigualdade de Minkowski, que corresponde à desigualdade triangular. Algumas características básicas forma verificadas, com ser completo, ou seja, toda seqüência de Cauchy neste espaço é convergente. Para $p \neq 2$ a lei do paralelogramo não é satisfeita, e a norma não provém de um produto interno, portanto $l^p, p \neq 2$ não é um espaço de Hilbert. É interessante observar que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach.

PALAVRAS CHAVES: Contra-exemplos, Hilbert, Banach, normado, completo.

TÍTULO DO PROJETO DO(S)ORIENTADOR(ES): ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO INFINITA.