Cálculo de uma raíz de um polinômio de grau 3

21 de outubro de 2013

Professor: Aldo Bazán Universidade Federal Fluminense

Exemplo:

Usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, encontre as raízes do polinômio:

$$x^3 - 5x^2 - 12x - 14; \quad em\ \mathbb{C}.$$

Algumas observações

Seja $A(x)$ um polinômio na variável x de grau n com coeficiente principal igual a 1, i.e.

$$A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0.$$

Se obtemos uma raíz r_1 do polinômio A, então é possível mostrar que podemos escrever o polinômio A da seguinte forma

$$A(x) = (x - r_1)A_1(x),$$

onde A_1 é um polinômio de grau $n-1$, também com coeficiente principal igual a 1. Se obtermos outra raiz r_2, então podemos escrever o polinômio A da seguinte forma

$$A(x) = (x - r_1)(x - r_2)A_2(x)$$

onde A_2 é um polinômio de grau $n-2$, também com coeficiente principal igual a 1. No caso geral, se tivermos as n raízes do polinômio A, então poderemos escrever ele como

$$A(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_{n-1})(x - r_n)$$

onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são as n-raízes do polinômio A. Este critério, que funciona para qualquer polinômio com coeficiente principal igual a 1, será usado para resolver este exercício.

Seja $P(x)$ o polinômio definido no exercício, i.e.

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 12x - 14.$$

Como este polinômio é de grau 3, então ele deve ter *três* raízes $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$, o que significa que devemos ter

$$P(r_1) = P(r_2) = P(r_3) = 0.$$

É possível mostrar que, usando estas três raízes, podemos escrever o polinômio P da seguinte forma

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Agora, para achar estas raízes, primeiro fazemos $P(x) = 0$, i.e.

$$x^3 - 5x^2 - 12x - 14 = 0,$$

e depois usamos algum método para determinar quais são essas raízes. É neste ponto que usamos o método de Cardano-Tartaglia para determinar um das raízes do polinômio de 3° grau. Para obter as outras duas raízes pode ser usada, por exemplo, a fórmula de Bháskara.

Para aplicar este método são necessárias duas mudanças na equação original:

a. Primeiro, fazemos $x = y + h$, onde y é uma variável e h é uma constante. O objetivo desta primeira mudança é descobrir o valor de h para que o polinômio fique na forma

$$y^3 + py + q.$$

Isto é obtido escolhendo um valor conveniênte para a constante h.

b. Depois, fazemos a mudança $y = u + v$, de onde o polinômio ficará em função de duas variáveis u e v:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q. \tag{1}$$

O objetivo desta segunda mudança é achar o valor de y, achando os valores de u e v no processo. Para encontra os valores de u e v, usamos o seguinte sistema associado à equação (1):

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= A, \\ u^3v^3 &= B. \end{aligned}$$

As constantes A e B vão ser escolhidas também de forma conveniênte, usando a equação (1).

Solução:

Seguindo o roteiro estabelecido nas linhas acima, fazemos as mudanças necessárias na equaçaõ original.

i. Primeiro, fazemos a seguinte mudança

$$x = y + h$$

onde y é uma nova variável e h será uma constante definida posteriormente. Esta mudança vai gerar o seguinte polinômio:

$$(y + h)^3 - 5(y + h)^2 - 12(y + h) - 14.$$

Fazendo as operações indicadas teremos que o polinômio ficará da seguinte forma:

$$y^3 + (3h - 5)y^2 + (3h^2 - 10h - 12)y + (h^3 - 5h^2 - 12h - 14). \tag{2}$$

Como mencionado linhas acima, o polinômio obtido nesta etapa nâo deverá conter y^2, e isso acontecerá quando o coeficiente de y^2 seja igual a zero. Mas o coeficiente de y^2 é $3h - 5$, então, fazendo $h = 5/3$ na equação (2), teremos o seguinte polinômio:

$$y^3 - \frac{61}{3}y - \frac{1168}{27}.$$

ii. Agora fazemos a mudança

$$y = u + v$$

onde u e v são variáveis. Esta mudança vai gerar o seguinte polinômio:

$$(u + v)^3 - \frac{61}{3}(u + v) - \frac{1168}{27}.$$

Fazendo as operações indicadas teremos que o polinômio ficará da seguinte forma:

$$u^3 + v^3 + (3uv - \frac{61}{3})(u + v) - \frac{1168}{27}. \tag{3}$$

O nosso objetivo agora é gerar um sistema de equações com u^3 e v^3. Observe que, se na equação (3) fazemos $u^3 + v^3 = 1168/27$ e $uv = 61/9$, teremos:

$$(u^3 + v^3) + (3uv - \frac{61}{3})(u + v) - \frac{1168}{27} = \frac{1168}{27} + (3(\frac{61}{9}) - \frac{61}{3}) - \frac{1168}{27} = 0,$$

i.e.

$$u^3 + v^3 + (3uv - \frac{61}{3})(u + v) - \frac{1168}{27} = 0.$$

Assim, se tivermos o seguinte sistema

$$u^3 + v^3 = \frac{1168}{27}$$
$$u^3 v^3 = \frac{61^3}{9^3}$$

então u e v serão as raízes de equação (3) (i.e. os valores de u e v escolhidos vão fazer que a equação seja igual a zero). O nosso objetivo final será descobrir os valores de u e v. Diretamente do sistema, ou associando ao sistema uma equação de 2° grau e aplicando a fórmula de Bháskara, temos

$$u^3 = 34,14 \qquad \wedge \qquad v^3 = 9,12$$

de onde

$$u = 3,24 \qquad \wedge \qquad v = 2,09.$$

Tendo os valores de u e v, a definição de y implica que

$$y = u + v = 3,24 + 2,09 = 5,33.$$

Finalmente, usando o valor de h obtido na primeira etapa e a definição de x temos

$$x = y + h = 5,33 + (5/3) = 7.$$

Isto quer dizer que 7 é uma raíz da equação original. De fato, se fizermos $x = 7$ no polinômio original, podemos observar que

$$7^3 - 5(7)^2 - 12(7) - 14 = 0.$$

Assim, temos que nossa equação original fica da seguinte forma

$$x^3 - 5x^2 - 12x - 14 = (x - 7)(x^2 + bx + c).$$

Como o polinômio original é de grau 3, e já obtivemos uma raíz, estão faltando as outras duas raízes. Elas serão fornecidas pelo polinômio quadrático que aparece no lado direito da igualdade. Observe que o polinômio de grau dois que aparece no lado direito tem o coeficiente de x^2 igual a 1. Isto acontece porque o polinômio original tem o coeficiente de x^3 é igual a 1. Usando o método de Briot-Ruffini ou multiplicando diretamente e igualando os coeficientes, temos que

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2x + 2,$$

e este polinômio tem como raízes $-1 + i$ e $-1 - i$, e assim temos que é satisfeita a seguinte igualdade

$$x^3 - 5x^2 - 12x - 14 = (x - 7)(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))$$

i,e., as raízes dele são 7, $-1 + i$ e $-1 - i$. Como as três estão no conjunto $\mathbb{C}$, então nesse conjunto, o polinômio original tem essas três raízes.