GAN 00157
Álgebra III
68 horas semestrais
(a partir do 2º semestre de 2009)

1. Complementos da Teoria de Grupos

   1.1 Subgrupo normal e o grupo quociente. Teorema fundamental dos homomorfismos.

   1.2 Conjugação, a classe de conjugação $C(a)$, o normalizador $N(a)$ de a e $|C(a)| = i_G(N(a))$. A equação de classe.

   1.3 Propriedades de p-grupos finitos.

   1.4 Teorema de Cauchy. Teoremas de Sylow.

   1.5 Produto direto de grupos. Produto direto (interno). Enunciado do Teorema de estrutura dos grupos abelianos finitos.

2. Extensões de corpos

   2.1 A característica de um domínio e de um corpo, corpo primo. Extensões de corpos, grau de uma extensão e a multiplicatividade do grau.

   2.2 Adjunção, elementos algébricos e transcendentes. Polinômio mínimo. Extensão simples.

   2.3 Anel quociente, ideais primos e maximais e propriedades do anel quociente. O corpo $K[x]/(p(x))$, com $p(x) \in K[x]$ irredutível, e a construção de uma raiz de $p(x)$. Construção de extensão $L|K$, tal que $f(x) \in K[x]$ de grau $n \geq 1$ tenha n raízes.

   2.4 Corpo de raízes ou de decomposição. Extensões isomorfas. Extensão de isomorfismo. Extensão da identidade e $K-$isomorfismo. Unicidade do corpo de decomposição.

   2.5 Caracterização das extensões normais (finitas).

   2.6 Derivação e raízes múltiplas. Elemento separável, polinômio separável, extensão separável e extensão inseparável. Toda extensão finita de um corpo de característica zero é simples.

3. Teoria de Galois

   3.1 Os elementos da Teoria de Galois: K-automorfismo de L, o grupo $G = G(L|K)$ e o grupo de Galois de $G(f(x)|K)$, onde $f(x) \in K[x]$.

   3.2 Se $f(x) \in K[x]\backslash K$ tem n raízes distintas em seu corpo de decomposição, então $G(f(x)|K)$ é isomorfo a um subgrupo de S_n. Se $f(x) \in K[x]\backslash K$ é um polinômio separável e L é o corpo de decomposição de $f(x)$ sobre K, então $|G(L|K)| = [L : K]$.

   3.3 Corpo intermediário. Se $K \subset F \subset F' \subset L$, então $G(L|F)$ é subgrupo de $G(L|K)$ e $G(L|F) \supset G(L|F')$. Se $F|K$ e $L|K$ são normais, então $G(L|F)$ é um subgrupo normal de $G(L|K)$ e $G(F|K) \simeq G(L|K)/G(L|F)$.

   3.4 Corpo fixo L_H, onde H é subgrupo de $G(L|K)$. Se H e H' são subgrupos de $G(L|K)$, com $H \subset H'$, então $L_H \supset L_{H'}$. A correspondência de Galois.

   3.5 Teorema de Dedekind: $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ automorfismos de L são L-li. Se G é um grupo finito de automorfismos de um corpo L e L_G é o corpo fixo de G, então $[L : L_G] = |G|$. Caracterização das extensões galoisianas. Teorema de Galois.

   3.6 Raízes complexas n-ésimas da unidade e raízes primitivas. O n-ésimo polinômio ciclotômico $\phi_n(x)$ em $\mathbb{C}[x]$. Se ξ é raiz complexa primitiva n-ésima da unidade, então $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$, onde ϕ é a função de Euler, e $G(\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_n{}^\star$.

4. Solubilidade por radicais

   4.1 Equação geral do grau n e seu grupo de automorfismos.

4.2 Grupo solúvel. Comutador $[a, b]$ de $a, b \in G$. O grupo comutador G' de G. Propriedades do comutador. G é solúvel se, e somente se, $G^{(r)} = \{e\}$. Propriedades adicionais. S_n, com $n \geq 5$, não é solúvel.

4.3 Extensão radical $M|K$. Polinômio solúvel por radicais. Se $f(x) \in K[x] \backslash K$ é solúvel por radicais, então $G(f(x)|K)$ é um grupo solúvel. O polinômio geral de grau $n \geq 5$ não é solúvel por radicais.

4.4 Construção de polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ com grupo de Galois isomorfo a S_p, p primo.

5. Aplicação da teoria: $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado.

Bibliografia:

- *Elementos de Algebra*, Arnaldo Garcia e Yves Lequain, Projetos Euclides, IMPA, 4ª edição, 2006.

- *Topics in Algebra*, I.N.Herstein, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1975.

- *Galois Theory*, Ian Stewart, Chapman & Hall/CRC, 2nd edition, 1989.

- *Elements of Abstract Algebra*, R.A. Dean, Wiley International, 1974.

- *Algebra*, Thomas W. Hungerford, Springer-Verlag, 1974.

- *Galois Theory*, Joseph Rotman, Springer-Verlag, 1990.