UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 3º E DO 4º GRAUS

Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira
IMPA, RJ

APRESENTAÇÃO

O autor deste trabalho tinha 14 anos quando me quis mostrá-lo, em 1987, mas não lhe dei na época a devida atenção.

Mais tarde, concordei em ouvi-lo e percebi logo que se trata da mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas para as equações do terceiro e do quarto grau que conheço.

É claramente do interesse dos leitores da **RPM** *tomar conhecimento destas demonstrações. Mas agora era o autor que relutava em publicá-las, alegando que já não tinham mais graça. Finalmente, porém, cedeu aos apelos e é com satisfação que trago esta pequena gema ao conhecimento do público.*

Elon Lages Lima

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 3º GRAU

Motivado pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do 2º grau em função dos coeficientes da equação, resolvi um dia calcular a expressão:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\,,$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ (e portanto satisfazem $x_1 + x_2 = S$ e $x_1x_2 = P$). Isso leva aos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \quad \Rightarrow \\ y^3 &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}\,(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \quad \Rightarrow \\ y^3 &= S + 3\sqrt[3]{P}\,y\,. \end{aligned}$$

Assim, para determinar y há que se resolver uma equação do 3º grau.

Ocorreu-me então o seguinte: Dada uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2º grau. Isso pode ser feito como a seguir:

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, procuramos uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente em y^2:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \;\Rightarrow\; y^3 + (3t+a)y^2 + \ldots = 0\,.$$

Fazemos $t = -a/3$ e caímos numa equação do tipo:

$$y^3 + py + q = 0\,.$$

Determinamos números P e S tais que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad \text{e} \quad q = -S\,,$$

de forma que se

$$\begin{aligned} &x_1 \text{ e } x_2 \quad \text{são raízes de} \quad x^2 - Sx + P = 0, \quad \text{então} \\ &\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \quad \text{satisfaz a equação} \quad y^3 + py + q = 0. \end{aligned}$$

Feito isso, obtemos

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{p^3}{27} \qquad \text{e} \qquad S = -q\,,$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$, isto é,

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde,

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

satisfaz $y^3 + py + q = 0$.

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = -p/3$ diz que o produto das duas raízes deve ser $-p/3$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -a/3$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 4º GRAU

Uma variação dessa técnica nos permite resolver equações do 4º grau.

Considere a equação do 3º grau $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = S\,, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d \quad \text{e} \quad x_1x_2x_3 = P\,.$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Temos:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 =$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})\,,$$

ou seja,

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}\,y\,, \qquad \text{ou}$$

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}\,y + S^2 - 4S_d = 0\,. \tag{$*$}$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$ e obtemos $y^4 + (4t + a)\,y^3 + \ldots = 0$. Tomando $t = -a/4$, obtemos uma equação do tipo

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0\,,$$

sem termo em y^3.

Comparando com $(*)$, tomamos S, P e S_d tais que

$$-2S = k_1, \qquad -8\sqrt{P} = k_2 \qquad \text{e} \qquad S^2 - 4S_d = k_3 \qquad \Rightarrow$$

$$S = -\frac{k_1}{2}, \qquad P = (\frac{k_2}{8})^2 \qquad \text{e} \qquad S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}.$$

Assim, resolvendo a equação

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{(k_1^2 - 4k_3}{16})x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0,$$

obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que

$$y = \sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_3 \quad \text{satisfaz} \quad y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta diminuir $a/4$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -k_2/8$ diz que $\sqrt{x}_1\sqrt{x}_2\sqrt{x}_3 = -k_2/8$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma obtemos todas as quatro raízes da equação original.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

a) Considere a equação $x^3 - 6x - 40 = 0$. Para aplicar a fórmula que dá as raízes da equação do 3º grau temos $p = -6$ e $q = -40$. A fórmula nos dá $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Assim, as três raízes da equação são: $x_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, $x_2 = \xi\,\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \xi^2\,\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ e $x_3 = \xi^2\,\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + {}$ $+\xi\,\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, onde $\xi = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Assim, x_1 é a única raiz real da equação. Por outro lado, claramente $x = 4$ satisfaz a equação, donde $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ (!)

b) Seja $\alpha = \cos 20°$. Como $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, temos:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° = 4\alpha^3 - 3\alpha \quad \Rightarrow$$

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{8} = 0.$$

Aqui $p = -3/4, q = -1/8$, e substituindo na fórmula obtemos as raízes de $x^3 - (3/4)x - (1/8) = 0$:

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{16} + \sqrt{\tfrac{1}{256} - \tfrac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{16} - \sqrt{\tfrac{1}{256} - \tfrac{1}{64}}},$$

ou

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}}\right),$$

que não diz nada de novo sobre $\cos 20°$. Essa expressão não é lá muito satisfatória, pois usa números complexos para exprimir $\cos 20°$, que é real. Na verdade é possível provar que qualquer expressão por radicais de $\cos 20°$ tem que envolver números complexos *.

c) Considere a equação $y^4 - 12y^4 - 16y - 4 = 0$. Segundo o método utilizado para resolver equações do 4º grau, temos:

$$k_1 = -12,\ k_2 = -16 \ \text{e}\ k_3 = -4.$$

Resolvendo a equação do 3º grau:

$$x^3 + (\frac{k_1}{2})x^2 + (\frac{k_1^2 - 4k_3}{16})x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0,$$

temos:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}.$$

As raízes de $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$ são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(lembre-se da regra dos sinais: o produto deve ser sempre $-k_2/8$, no caso igual a 2).

* Um teorema sobre solubilidade de equações polinomiais por radicais reais, *Matemática Universitária*, nº12, dezembro de 1990, do mesmo autor.

d) Considere a equação $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$.

Fazendo $x = y - 1$, obtemos $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$.

Temos, pois, $k_1 = 2, k_2 = -16$ e $k_3 = 17$.

A equação auxiliar $x^3 + \frac{k_1}{2} x^2 + \frac{k_1^2 - 4k_3}{16} x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0$

torna-se $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$, cujas raízes são -1, -2 e 2.

Assim, as raízes de $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$ são

$i + i\sqrt{2} + \sqrt{2}$, $i - i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ $-i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ e $-i - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$

e, como $x = y - 1$, as raízes de $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$ são

$-1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$, $-1 - \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$, $-1 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1)$ e $-1 + \sqrt{2} + i(-1 - \sqrt{2})$.

NR. Poucos dias antes da impressão deste número, a **RPM** recebeu uma carta do autor, pedindo que a seguinte nota fosse anexada ao artigo: "Recentemente, folheando o livro *Elements of Algebra* do Euler, descobri que o próprio Euler tinha desenvolvido essencialmente o mesmo método que o meu para resolver equações do 4º grau (EULER, L. *Elements of Algebra*, New York, Springer, c. 1972, Section IV, chap. XV, p. 282: Of a new method of resolving equations of the forth degree)".

Carlos Gustavo Moreira é mestre e doutor em Matemática pelo IMPA e, atualmente, faz um estágio de pós-doutorado nessa instituição. Participou de algumas Olimpíadas Internacionais de Matemática, tendo ganho uma medalha de bronze em 1989, na Alemanha, e uma de ouro em 1990, na China. Também ganhou medalhas de ouro nas Olimpíadas Ibero-Americanas de 1989, em Cuba, e em 1990, na Espanha. Atualmente, Carlos Gustavo é membro ativo da Comissão de Olimpíadas da Sociedade Brasileira de Matemática. Canta muito bem e sabe de cor as letras de inúmeras canções brasileiras e latino-americanas.