2° Prova de Álgebra Linear Aplicada

10 de julho de 2013

Aluno:

Professor: Aldo Bazán — Universidade Federal Fluminense

---

1. Verifique em cada caso, se W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

   a. $(1,0\ pt)$ $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 :\ a+b+c \geq 0\}$

   Para verificar se W é um subespaço vetorial, devemos verificar duas condições:

   i. $(0,0,0) \in W$
   ii. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in W$, então

   $$\alpha(a_1,a_2,a_3) + \beta(b_1,b_2,b_3) \in W.$$

   Observe que a primeira condição é satisfeita, dado que o vetor $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ satisfaz a condição

   $$0+0+0 \geq 0.$$

   No caso da segunda condição, deveriamos mostrar que, se tivermos dois elementos de W, então a combinação linear deles deveria gerar um elemento de W, e isto deveria ser satisfeito para quaisquer par de elementos de W. Porém, se $\alpha = -1$, $\beta = 0$ forem os escalares, e $(1,0,0)$ e $(0,0,0)$ forem os dois elementos de W, então teriamos que

   $$(-1)(1,0,0) + (0)(0,0,0) = (-1,0,0)$$

   e este elemento de $\mathbb{R}^3$ não está em W, dado que

   $$-1+0+0 = -1 < 0,$$

   e assim, W não é um subespaço do espaço $\mathbb{R}^3$.

   b. $(1,0\ pt)$ $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 :\ c = 3b - 2a\}$.

   Observe que

   i. O ponto $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ está em W. De fato, como a terceira componente do vetor nulo pode=se escrever como

   $$0 = 3.0 - 2.0,$$

   então $(0,0,0) \in W$.
   ii. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in W$. Fazendo a combinação linear dos dois vetores de W temos

   $$\alpha(a_1,a_2,a_3) + \beta(b_1,b_2,b_3) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3).$$

   Este ponto está em $\mathbb{R}^3$, mas devemos verificar se ele está em W. Para isso, devemos verificar se ele satisfaz a condição dos pontos de W, i.e.

   $$\alpha a_3 + \beta b_3 = 3(\alpha a_2 + \beta b_2) - 2(\alpha a_1 + \beta b_1).$$

2. Seja V o espaço das $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   a. $(1,0\ pt)$ Encontre uma base e a dimensão do espaço V.

   b. $(1,0\ pt)$ Se $A \in V$, é o conjunto $\{I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ A^6\}$ linearmente independente? (suponha que nenhuma das matrizes do conjunto é a matriz nula).

3. $(2,0\ pt)$ Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x,y) = (x + ky, -y).$$

   Prove que T é $1-1$ e que $T^{-1} = T$, para cada valor real de k.

4. $(2,0\ pt)$ Dadas as bases

$$\alpha = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,1,1)\}\ \ de\ \mathbb{R}^3,\ \ e$$
$$\beta = \{(1,2),(0,1)\}\ \ de\ \mathbb{R}^2,$$

   ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $(2,0\ pt)$ Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $u = (1,2,3,-1,2)$ e $v = (2,1,3,2,-1)$. Determine uma base de $W^{\perp}$.